

НАРОДНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Естественнонаучный факультет
Издается с 1961 г.

А. М. Чубарев,

кандидат технических наук

В. С. Холодный,

журналист

НЕВЕРОЯТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

*(О прикладном значении
теории вероятностей)*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
МОСКВА 1976

Чубарев А. М. и Холодный В. С.

Ч-81 Невероятная вероятность (О прикладном значении теории вероятностей). М., «Знание», 1976.

128 с. (Нар. ун-т. Естественнонаучный фак.)

Книга посвящена теории вероятностей и ее применению в различных областях науки и техники.

Авторы знакомят читателей с методами вероятностно-статистической обработки данных, применение которых дает на практике большую эффективность.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — студентов, учителей, инженерно-технических работников, а также на слушателей народных университетов и на всех, кто интересуется этой наукой.

Ч $\frac{20203-058}{073(02)-76}$ БЗ—71—08—75

517

...Невероятная эффективность математики... есть нечто граничащее с мистикой...

Е. Вигнер

Введение

Начиная со второй половины XX в. количественное измерение явлений, математическое моделирование различных процессов, в том числе производственных, стали непременным условием научного творчества. Благодаря этому особое значение приобрели вероятностно-статистические методы. «Наука о случае» вошла в арсенал важнейших инструментов большого круга людей: инженеров, экономистов, врачей и многих других специалистов различных отраслей народного хозяйства. Во всем мире настолько усилился интерес к этой науке, что теория вероятностей стала модной в самом лучшем смысле этого слова.

В России первые исследования по теории вероятностей были выполнены к середине XIX столетия. Они связаны с именами замечательных русских ученых-математиков Н. И. Лобачевского (1792—1856), М. В. Остроградского (1801—1861) и В. Я. Буняковского (1804—1889). «Основания математической теории вероятностей» (1846 г.) В. Я. Буняковского имели большое значение для ознакомления русских математиков с этой теорией, так как это было первое фундаментальное руководство по теории вероятностей, изданное в России.

В этой работе Буняковский наряду с оригинальным изложением самой теории вероятностей осветил вопросы ее практического применения. Кроме того, он впервые здесь дал терминологию новой науки на русском языке

Это было сделано настолько удачно, что она не подверглась существенным изменениям до сих пор. Многие из последующих научных работ Буняковского были тесно связаны с развитием русской промышленности и хозяйства. Они содействовали успешному распространению теории вероятностей в России. Благодаря трудам Буняковского преподавание теории вероятностей в русских университетах поднялось на новую ступень и стало намного шире и глубже по сравнению с зарубежными.

Если этот этап являлся в какой-то степени подготовительным, то во второй половине XIX столетия следует целый ряд блестящих открытий русских математиков. После работ выдающегося русского математика и механика П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. М. Ляпунова (1857—1918) и А. А. Маркова (1856—1922) во всем мире теорию вероятностей стали называть «русской наукой».

Эти замечательные традиции были продолжены советскими учеными. Работы С. Н. Бернштейна (1880—1968), начатые им еще до Великой Октябрьской социалистической революции, оказали серьезное влияние на дальнейшее распространение идей теории вероятностей в нашей стране. Им была воспитана целая плеяда ученых, образовавших ленинградскую школу теории вероятностей. В середине 20-х годов А. Я. Хинчин (1894—1959) и А. Н. Колмогоров создали московскую школу теории вероятностей. Решающее значение имела работа А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.), которая знаменовала собой начало нового исторического этапа в развитии этой науки.

Вклад академика А. Н. Колмогорова — Героя Социалистического Труда, лауреата Лейнинской премии, первого в истории лауреата международной математической премии Бальцано, почетного члена многих академий мира — в современную математику огромен. Трудно даже перечислить те области науки, в которых им получены фундаментальные результаты. И все же можно смело утверждать, что самым большим его научным достижением является создание современной теории вероятностей.

Заслуга А. Н. Колмогорова состоит не только в разработке новых научных теорий, но еще в большей степени в том, что он воспитал целую плеяду талантливых ученых. По сути дела, почти каждый математик в нашей стране, работающий в области теории вероятностей, яв-

ляется учеником А. Н. Колмогорова или учеником его учеников. Ученики А. Н. Колмогорова — академик АН СССР Б. В. Гнеденко, академик Ю. В. Прохоров, Б. А. Севастьянов и другие получили результаты, которые буквально преобразовали лицо этой науки. Значителен вклад в теорию вероятностей выдающегося математика, академика Ю. В. Линника (1915—1972), который после Великой Отечественной войны возглавлял широкие исследования, проводившиеся в Ленинграде и Вильнюсе.

Сейчас, пожалуй, нет области знания, в которой не использовались бы методы теории вероятностей. Применение вероятностно-статистических методов стало традиционным во многих науках. К ним относятся физика, геодезия, теория измерений и др. В последнее время теория вероятностей неожиданно стала использоваться в таких науках, где этого и нельзя было ожидать. Это медицина и биология, военная наука и космонавтика, теория стихосложения и лингвистика, психология и теория обучения... Кроме того, на основе вероятностных методов появился целый ряд новых наук, отпочковавшихся от теории вероятностей. Это теория информации, теория надежности, статистический контроль качества, планирование эксперимента и др.

На нынешнем этапе развития народного хозяйства решение многих практических задач в машиностроении, строительстве, экономике, управлении, телефонии, метеорологии, в металлургии и многих других отраслях стало невозможно без использования вероятностных и статистических методов.

Нельзя не отметить, что теория вероятностей является математической основой одной из новых наук XX в. — кибернетики. А развитие кибернетических идей, в свою очередь, способствовало еще большему возрастанию прикладного значения теории вероятностей.

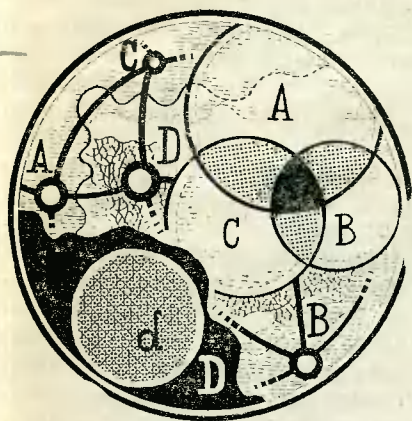
Существенный отпечаток на развитие теории вероятностей наложило еще одно детище научно-технической революции — электронно-вычислительные машины. Различные приложения теории вероятностей, как правило, связаны с громоздкими вычислениями, преодолеть которые могут только весьма настойчивые и мужественные люди. История называет нам имена таких феноменальных «счетчиков» — Эйлер, Гаусс, Чупров. Подавляющее большинство математиков эти вычисления «отпугивали» от теории вероятностей, поэтому многие важные методы

этой науки не могли быть применены для решения практических задач. Возможности современной вычислительной техники, образно говоря, открыли шлюзы, сквозь которые вероятно-статистические методы хлынули в практику.

В настоящее время в нашей стране действуют десятки тысяч электронно-вычислительных машин. Быстродействие этих машин поражает воображение — они совершают до 1 млн. операций в секунду, а некоторые из них в секунду могут выполнять более 10 млн. операций. Теперь, например, стало возможным, прежде чем строить какую-нибудь промышленную установку, изучить ее работу на математической модели, или выбрать наилучшую технологию варки стали, или обосновать рациональное размещение производственных мощностей, рассчитать оптимальный тариф на проезд в такси и даже... разгадывать тайны древних рукописей.

8 Научно-техническая революция поставила перед советскими учеными-специалистами в области теории вероятностей новые задачи, направленные на тесное соединение науки с практикой. Но эти задачи не застали наших ученых врасплох. Для советской вероятностной школы наиболее характерной чертой всегда являлось органическое сочетание теории с решением практических задач. Примером этому служит то, как машиностроители применяют теорию надежности Б. В. Гнеденко, металловеды используют теорию прочности В. М. Финкеля, работники промышленных предприятий проводят контроль качества по методу А. Н. Колмогорова.

В нашей стране исследования по теории вероятностей проводятся во многих научных центрах: Москва (А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохоров, Б. А. Севастьянов, Ю. А. Розанов, В. Н. Тутубалин и др.), Ленинград (И. И. Ибрагимов, В. В. Петров), Киев (А. В. Скороход, В. С. Корольюк), Новосибирск (А. А. Боровков), Ташкент (Т. А. Сарымсаков, С. Х. Сираждинов), Вильнюс (Й. П. Кубилюс, В. А. Статулявичус) и т. д. Такой широкий и многонациональный характер советской теории вероятностей является залогом новых теоретических открытий и их успешных применений на практике.



ЧТО ТАКОЕ ВЕРОЯТНОСТЬ?

ОШИБКА Д'АЛАМБЕРА

Задачи, приводящие к понятию вероятности. Как вы уже знаете из названия и из подзаголовка книги, в ней пойдет речь о теории вероятностей и о том, как эта наука применяется на практике. Но прежде чем рассказать обо всем этом, давайте выясним, что же такое вероятность.

Вероятность относится к числу понятий, которыми мы охотно пользуемся в повседневной жизни, совсем не задумываясь об этом. Например, даже наша речь носит отпечаток стихийно-вероятностного подхода к окружающей нас действительности:

- Мы пойдем завтра на хоккей?
- Вероятно...
- Ты уверен, что Богданова изберут в комиссию?
- Маловероятно...
- Вы слышали, что Филатов развелся?
- Невероятно!!!

Уже в этих коротких репликах «вероятно, маловероятно, невероятно» имеется попытка оценить возможность появления того или иного события, т. е. попытка дать количественную (числовую) оценку этой возможности. Идея выражать числами степень возможности появления

тех или иных событий возникла после того, как люди наблюдали множество примеров, в которых проявлялось удивительное свойство устойчивости явлений, т. е. способность повторяться довольно часто. Многие из этих примеров стали классическими. Приведем некоторые из них.

Представьте, что вы подбросили монету, подбив ее ногтем большого пальца так, чтобы она завертелась в воздухе и, подлетев почти до потолка, со звоном опустилась на пол. Можно ли точно предсказать, как она упадет — на «орла» или на «решку»? «Разумеется, нет», — ответите вы и будете правы. Конечно, при единичном подбрасывании выпадение «орла» и «решки» происходит совершенно случайно. Но если подбросить монету достаточно большое число раз, то почти наверняка можно утверждать, что примерно половину раз она упадет на «орла», а половину на «решку».

Может показаться, что рассмотрение таких примеров недостойно настоящей науки. Однако их простота только кажущаяся. При более глубоком исследовании здесь можно обнаружить ряд серьезных научных проблем. Над ними работали многие выдающиеся математики прошлого. Именно решение подобных задач в большой степени стимулировало возникновение теории вероятностей как науки.

Знаменитый французский естествоиспытатель Бюффон (1707—1788) проделал этот опыт 4040 раз, при этом выпадение «орла» равнялось 2048. Известный английский математик и биометрик Пирсон (1857—1936) повторил опыт 12 тысяч раз, у него число выпадений герба составило 6019. Проделав опыт 24 тыс. раз, он получил выпадение герба в 12012 случаях.

Из этих опытов видно, что доля появления герба явно стремится к $\frac{1}{2}$.

Следующий пример взят нами из науки о народонаселении — демографии. Демографам хорошо известна цифра 0,514.

Что же она означает? В каждом конкретном случае наука не может предсказать пол новорожденного



(т. е. кто должен появиться на свет — девочка или мальчик), но если рассматривать новорожденных в большом количестве, то открывается весьма любопытная закономерность: во все времена и во всех странах на каждую 1000 новорожденных приходится ровно 514 мальчиков. Таким образом 0,514 — это доля мальчиков среди новорожденных. Интересно, что эта закономерность была подмечена очень давно. Еще в Древнем Китае за 2238 лет до нашей эры на основании переписей было найдено это число, правда, оно принималось равным $\frac{1}{2}$.

В последнее время «наука о случае» пополнилась еще многими разнообразными примерами. Так, в практике многих заводов получил широкое распространение метод моментных наблюдений. В чем его суть? Представим, что мы находимся в инструментальном цехе завода, где работают на станках сотни рабочих. Для того чтобы выявить резервы повышения производительности труда каждого рабочего, нужно точно знать, как расходует он время, нет ли у него непроизводительных потерь времени (т. е. нужно сделать хронометраж его рабочего дня).

Еще несколько лет назад эта работа проводилась следующим образом. Рядом со станочником становился хронометражист с блокнотом, карандашом и секундомером и, не отходя ни на один шаг от рабочего, тщательно все фиксировал: сколько времени затрачено на подготовку станка к работе, сколько времени ушло на изготовление детали, а если станок простаивал, то опять записывалось время и причины. Понятно, что для выполнения такого хронометража требовалось очень много работников, а нахождение их у станков существенно мешало работе, поэтому хронометраж не давал желаемых результатов.

Все это заставило ученых искать какой-либо другой метод. И вот математики нашли его — это так называемый метод «моментных наблюдений». Неоспоримое преимущество этого метода заключается в том, что один хронометражист может одновременно делать «фотографию» рабочего дня практически всех рабочих в цехе. Проходя по цеху, он отмечает, чем занимается каждый рабочий в данный момент времени (заметьте, ему не надо стоять, как говорится, «над душой» рабочего).

По окончании смены подводится итог моментным наблюдениям и делается «фотография» рабочего дня. Например, если для какого-то рабочего всего за смену сде-

лано 100 наблюдений и из них 70 раз отмечалось, что станок находился в работе, то это и будет означать, что производительные затраты рабочего времени составляют 70%. Здесь, правда, есть опасение: а не являются ли эти цифры случайными, ведь время для моментных наблюдений выбиралось случайно? Весь секрет как раз в том и заключается, что, хотя время и выбиралось случайно, результат получается все же неслучайным в силу вероятностных законов, о которых речь пойдет дальше.

Как видно из примеров (а их можно было привести еще больше), многие явления нам кажутся случайными только при первом (поверхностном) взгляде на них. При более углубленном изучении обнаруживается, что на самом деле сквозь нагромождение случайностей пробивает себе дорогу закономерность. Так, в первом примере доля выпадения «решки» колеблется вокруг числа $\frac{1}{2}$, во втором — доля рождения мальчиков выражается с большей точностью числом 0,514 и даже в третьем примере случайные моментные наблюдения с большой достоверностью позволяют оценить производственные затраты рабочего времени.

Закономерности такого рода и привлекли к себе внимание ученых. Для того чтобы численно выразить эту закономерность, были введены различные определения понятия вероятности. В настоящее время таких определений существует очень много. Одни из них являются более удачными и широко используются на практике, другие менее удачны и, следовательно, реже употребляются. Рассмотрим те из них, которые получили наибольшую известность.

Классическое определение вероятности. Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть *классическим определением вероятности*, или, короче, *классической вероятностью*. Первые попытки строго сформулировать это определение принадлежат крупным математикам XVII в. французам П. Ферма, Б. Паскалю и голландцу Х. Гюйгенсу. Затем оно используется швейцарским математиком Я. Бернулли (1654—1705) в знаменитом труде «Наука предположений», который был опубликован уже после его смерти в 1713 г. Однако окончательно это определение оформилось в работах выдающегося французского математика П. Лапласа (1749—1827) в начале прошлого столетия. С того времени классическое

определение, по существу, не претерпело никаких изменений.

Перед тем, как сформулировать классическое определение вероятности, введем ряд вспомогательных понятий, без которых дальнейшее изложение классической теории вероятностей невозможно. Прежде всего выясним, какое событие называется *достоверным*. Это такое событие, которое обязательно произойдет при выполнении некоторого комплекса условий S .

Отметим, что выполнение этого комплекса условий является очень важным. Так, одно и то же событие может быть достоверным или недостоверным в зависимости от того, в каких условиях оно рассматривается. Например, чтобы ракета оторвалась от земли и вышла на околоземную орбиту, ей нужно создать определенный комплекс условий, в частности, сообщить первую космическую скорость.

Этот пример позволяет уяснить второе важное понятие классической теории вероятностей — *невозможное событие*. Это такое событие, которое наверняка не произойдет при выполнении некоторого комплекса условий S . Возвращаясь к нашему примеру, скажем, что если ракете не будет сообщена первая космическая скорость, то она не сможет преодолеть земное тяготение и выйти на орбиту искусственного спутника.

Однако наиболее часто приходится сталкиваться с такими событиями, которые при выполнении некоторого первоначального комплекса условий S могут произойти или не произойти. Такие события называются *случайными*. Например, читатель, начавший читать эту книгу, может ее дочитать до конца или не дочитать по каким-либо причинам. Таким образом, событие «читатель дочитал эту книгу» тоже является случайным так же, как и обратное.

— Всякое событие мы будем рассматривать в дальнейшем как исход некоторого испытания. Иными словами, определенный комплекс условий, о котором шла речь выше, будем понимать как испытание. Например, событие «цель поражена» является случайным исходом испытания, состоящего в том, что по цели был выпущен снаряд.

Таким образом, мы рассмотрели три основных типа событий, изучаемых в теории вероятностей. Кроме того, классическое определение вероятности тесно связано с

тремя свойствами событий, без выполнения которых нельзя говорить о классическом определении вероятности. Рассмотрим подробнее, каковы же эти свойства. При подбрасывании монеты могут наступить два события: выпадет «орел» или «решка». Причем появление одного из событий в единичном испытании исключает появление другого события в том же испытании. Такие события называются *несовместными*. На практике очень часто приходится сталкиваться с несовместными событиями. Если изготовлена деталь, то она может оказаться годной или бракованной. Очевидно, что эти два события несовместные.

Важно также, что при рассмотрении группы этих событий может произойти только одно из них, а никакие другие события, не входящие в рассматриваемую группу, произойти не могут. Например, если у больного обнаружена гиперемия носоглотки, то, как правило, при данном симптоме могут быть три различных заболевания — грипп, ангина или острое респираторное заболевание. Такие события называются *единственно возможными*.

Пожалуй, наибольшее внимание математиков в течение нескольких столетий привлекало третье свойство событий, которое мы поясним на следующем примере. Известно, что математики смело вычисляли вероятности тех или иных ситуаций, складывающихся в азартных играх. Их расчеты основывались на твердом убеждении в том, что нет никаких оснований предполагать один какой-нибудь исход в единичном испытании более возможным, чем другие исходы. Например, подбрасывая игральную кость, нет никаких оснований предполагать выпадение одной какой-нибудь грани, например, той, на которой имеется шестерка, более возможным, чем выпадение других граней. Такие события называются *равновозможными*.

Все рассмотренные выше понятия позволяют теперь сформулировать то определение вероятности, которое принято называть классическим.

Классической вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов¹ к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов.

¹ Благоприятными исходами называются также, при которых событие A обязательно произойдет.

Используя математические символы, данное определение можно записать так: $P(A) = \frac{m}{n}$,

где $P(A)$ — классическая вероятность рассматриваемого события A ;

m — число исходов, благоприятных для события A ;

n — общее число несовместных единственно возможных и равновозможных исходов.

Из этого определения легко можно вывести основные свойства классической вероятности:

- 1) вероятность достоверного события равна 1;
- 2) вероятность невозможного события равна 0;
- 3) вероятность случайного события заключена между 0 и 1.

В самом деле, если событие достоверное, то все исходы будут благоприятными этому событию. Иными словами, число благоприятных исходов равно общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов, а их отношение, следовательно, будет равно 1. Если же событие невозможное, то ни один исход не будет благоприятным этому событию. Это значит, что число благоприятных исходов равно 0 и, следовательно, вероятность этого события тоже равна 0. Для случайного события число благоприятных исходов заключено между 0 и n , отсюда следует, что вероятность этого события будет заключена между 0 и 1.

Одной из первых задач, для решения которых были использованы методы классической теории вероятностей, является следующая: вычислить вероятности всех возможных значений суммы очков, выпадающих при подбрасывании двух игральных костей. Очевидно, что самым маленьким значением суммы является число 2, а самым большим — число 12. Будем последовательно вычислять вероятности всех значений от 2 до 12. Сначала вычислим общее число возможных исходов. Их будет ровно 36, так как каждая цифра, выпадающая на первой игральной кости, может складываться с шестью различными цифрами, выпадающими на второй игральной кости (т. е. 6×6).

Эти исходы отвечают трем требованиям, предъявляемым классической вероятности. Они несовместны, так как появление одного исхода исключает появление других в единичном испытании. Они единственно возможны, так как при одном подбрасывании двух игральных костей

возможен один и только один из этих исходов. Они равновозможны, так как в силу случайного падения игральных костей нет никаких оснований считать какой-нибудь один из исходов более возможным, чем другие. Выполнение трех перечисленных требований позволяет использовать классическое определение для подсчета вероятности.

Появлению числа 2 благоприятствует всего один исход $(1+1)$, следовательно, $P(2) = \frac{1}{36}$. Появлению числа 3 благоприятствуют уже два исхода $(1+2, 2+1)$, следовательно, $P(3) = \frac{2}{36}$.

Продолжая вычисление аналогичным образом, все полученные результаты представим в следующем виде:

Значения суммы очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятности этих значений	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Приведенная таблица и дает ответ на вопрос, поставленный в задаче. Видно, что значения, находящиеся в середине таблицы, имеют более высокую вероятность в сравнении с остальными значениями.

Классическая вероятность позволяет решать многие практические задачи. Однако по мере расширения области использования теории вероятностей выявлялись и недостатки этого определения. К числу недостатков в первую очередь следует отнести то, что классическая вероятность накладывает очень жесткие требования на первоначальный комплекс условий. Кроме того, классическая вероятность определена лишь для конечного числа исходов. В связи с запросами практики необходимо было ввести другие определения вероятности, которые могли бы в той или иной степени преодолеть эти недостатки.

Вероятностные игры. Определенная вероятность выигрыша положена в основу различных азартных игр и лотерей. Одной из них является так называемая генуэзская лотерея, которая процветала во многих странах в прошлые века, а в некоторых сохранилась и сейчас. Суть ее заключается в следующем. Устроители лотереи про-

дают 90 билетов, на которых стоят числа от 1 до 90. Есть билеты, на которых стоят два, три, четыре или пять чисел. В день розыгрыша генуэзской лотереи из мешочка, содержавшего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали только пять жетонов. При этом выигрывали те билеты, на которых все числа совпадали с числами на жетонах, вытянутых из мешочка.

В случае выигрыша билета с одним числом выдавалось вознаграждение, в 15 раз большее стоимости билета, в случае выигрыша билета с двумя числами (амбо) — в 270 раз больше, в случае выигрыша билета с тремя числами (терн) — в 5500 раз больше, в случае выигрыша билета с четырьмя числами (катерн) — в 75 000 раз больше, в случае выигрыша билета с пятью числами (квин) — в 1 000 000 раз больше.

Многие люди пытались разбогатеть с помощью генуэзской лотереи, но почти всех ждало разочарование. Вот как в новелле «Розыгрыш лотереи» итальянская писательница Матильда Серао (1856—1927) описывает проведение одной из таких лотерей и чувства ее участников.

«Каждый раз, когда служитель объявлял следующий номер билета, толпа отвечала громкими возгласами, криком, хихиканьем, смехом... которым вторил глухой ропот... По мере того, как приближалась минута осуществления мечты, лихорадка, охватившая неаполитанцев, все усиливалась...

К хору возмущенных голосов, не стихавшему ни на мгновение, добавился злобный свист. Поток ругани обрушился на служителя; но больше всего досталось самой лотерее, где никогда не выиграешь, где все так и устроено, чтобы никогда не выиграть...»

Ну, а теперь давайте рассмотрим генуэзскую лотерею не с художественной, а с чисто математической, точнее говоря, с точки зрения теории вероятностей. Проанализируем вариант игры, когда участник лотереи купил билет с одним числом. Используя методы комбинаторики, можно вычислить, что общее число исходов лотереи равно C^5_{90} , из них число благоприятных исходов для владельца билета C^4_{89} . Таким образом, вероятность того, что билет окажется выигрышным (обозначим это событие буквой B), равна

$$P(B) = \frac{C^4_{89}}{C^5_{90}} = \frac{1}{18}.$$

При других вариантах игры, когда участник покупал билет с двумя, тремя, четырьмя или пятью числами, вероятность выигрыша становилась еще меньше.

Задача де Мере. Основы классической теории вероятностей были заложены в середине XVII в. в переписке между двумя выдающимися учеными Паскалем и Ферма. Они рассмотрели решение ряда задач, связанных с азартными играми, которые предложил кавалер де Мере (1607—1648).

Многие ученые подчеркивали роль, которую сыграли задачи де Мере для развития теории вероятностей. Правда, в настоящее время, видимо, уже невозможно определить, какова истинная роль де Мере в создании «науки предположений». С годами легенда о нем обростала все новыми подробностями, и теперь трудно отличить, что действительно принадлежит де Мере, а что приписало ему воображение потомков.

Тем не менее, как говорится, «нет дыма без огня», и то, что задачи, поставленные де Мере перед учеными, могли дать определенный толчок развитию «науки предположений», не вызывает сомнения. Тем более, что кавалер де Мере был философом, литератором и довольно значительной фигурой при дворе Людовика XIV. Он интересовался математикой и состоял в переписке почти со всеми выдающимися математиками своего времени, в том числе и с Паскалем.

Вот один из парадоксов, который поставил де Мере перед знаменитым Паскалем. Какова вероятность получения в сумме 11 и 12 очков при подбрасывании трех игральных костей?

Рассуждение де Мере было примерно следующим: 11 очков можно получить шестью различными способами (6—4—1, 6—3—2, 5—5—1, 5—4—2, 5—3—3, 4—4—3) и 12 очков тоже можно получить шестью способами (6—5—1, 6—4—2, 6—3—3, 5—5—2, 5—4—3, 4—4—4). А так как число исходов, при которых получается в сумме 11 и 12 очков, равно между собой, то и вероятности получения 11 и 12 очков равны между собой. «Но, — продолжал де Мере, — наблюдая в течение длительного времени за игрой в кости и тщательно подсчитывая возможные исходы игры, я заметил, что те, кто ставит на 11 очков, выигрывают чаще, чем те, кто ставит на 12 очков. Вот здесь и возникает противоречие между расчетами и реальными шансами на выигрыш...»

Паскаль довольно быстро нашел ошибку в рассуждениях де Мере. Дело в том, что исходы, которые рассматривал де Мере, не являются равновозможными. Кавалер не принимал во внимание тот факт, что, например, комбинация (6—4—1) может возникнуть при шести различных исходах бросания (если учитывать, на какой из трех костей выпадают те или иные очки). Вот эти шесть исходов: (6, 4, 1), (6, 1, 4), (4, 6, 1), (4, 1, 6), (1, 6, 4), (1, 4, 6). В то же время другим комбинациям благоприятствует меньшее количество исходов. Например, комбинация (4—4—4) возникает при единственном исходе (4, 4, 4).

Если говорить на современном языке, то можно сказать, что де Мере неправильно определил поле элементарных событий, или поле элементарных исходов. Нетрудно подсчитать, что при подбрасывании трех игральных костей возможны 216 ($6 \times 6 \times 6$) несовместных, единственно возможных и равновозможных исходов. Появлению события A (сумма выпавших очков равна 11) благоприятствуют 27 исходов, а появлению событий B (сумма выпавших очков равна 12) благоприятствуют 25 исходов. По формуле классической вероятности вычисляем, что

$$P(A) = \frac{27}{216} \quad \text{и} \quad P(B) = \frac{25}{216},$$

откуда видно, что $P(A) > P(B)$.

Следовательно, подмеченная кавалером де Мере закономерность, состоящая в том, что сумма 11 очков появляется при подбрасывании трех игральных костей несколько чаще, чем сумма 12 очков, оказалась верна.

Ловушка, в которую попал де Мере, состояла в нарушении одного из основных требований (равновозможности), предъявляемых классическим определением вероятности к первоначальному комплексу условий. В эту ловушку попадались многие знаменитые математики. Одним из них был великий французский математик и философ Жан Лерон Д'Аламбер (1717—1783).

Ошибка Д'Аламбера. Монету бросают два раза. Какова вероятность того, что хотя бы раз появится «орел»? — такую задачу пытался решить Д'Аламбер.

Для простоты рассуждений представим, что мы подбрасываем две монеты одновременно. При этом возможны четыре исхода: «орел» и «решка»; «решка» и «орел»; «решка» и «решка», «орел» и «орел». Для наглядности

изобразим эти исходы так $(+, -)$; $(-, +)$; $(-, -)$; $(+, +)$. Эти исходы являются несовместными, единственно возможными и равновероятными, причем при трех исходах хотя бы один раз появится «орел». Следовательно, искомая вероятность равна отношению 3 к 4, т. е. $\frac{3}{4}$.

Д'Аламбер предложил решение, что «орел» появится либо при первом бросании, либо при втором, либо совсем не появится. Всех случаев три, из них благоприятствуют ожидаемому событию два, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$. Легко можно убедиться в том, что рассматриваемые Д'Аламбером случаи не равновероятны.

Если вернуться к рассмотренному нами решению, то вероятность события «орел» совсем не появится, т. е. $(-, -)$, равна $\frac{1}{4}$, а вероятности событий «орел» появится при первом бросании и «орел» появится при втором бросании равны по $\frac{3}{8}$.

Итак, Д'Аламбер ошибся. Это широко рекламируется, как утешительный факт для многих смертных — пример того, что даже крупные математики иногда ошибались при решении элементарных задач по теории вероятностей. Но почему же сам Д'Аламбер до конца жизни не признал ошибку, которая сейчас очевидна почти любому школьнику? Д'Аламбер шел первым по непроторенному пути, к тому же бывают ошибки, стоящие больше великих открытий. Ошибка, которую допускает Д'Аламбер в этом решении, заключается в том, что он не различает равновероятные и неравновероятные исходы.

Статистическая вероятность. Выше говорилось о том, что для устранения недостатков классического определения вероятности был введен ряд других определений. Одним из них, которое оказалось особенно полезным при решении многих практических задач, является статистическое определение, опирающееся на устойчивость частот. Так, если можно в неизменных условиях провести неограниченное число независимых испытаний, причем частота появления события A для каждой большой группы испытаний лишь незначительно будет отклоняться от некоторой постоянной, то эта частота или число, близкое к ней, может быть приближенно принято за численное значение этой постоянной или, иначе, за вероятность события A . Определенная таким образом вероятность называется *статистической вероятностью*.

Примером статистической вероятности может являться упоминавшаяся цифра 0,514 — вероятность рождения мальчиков, или цифра 0,013 — вероятность того, что 10-летний ребенок доживет до 90 лет.

Статистическое определение вероятности, которое было только что приведено, широко используется наряду с классическим определением, но пусть читатель не думает, что речь идет о каких-то двух различных вероятностях. Вероятность изучаемого случайного события А одна. Она является объективной числовой характеристикой явления и имеет не зависящий от познающего субъекта смысл.

В то же время статистическая вероятность обладает рядом недостатков:

- 1) она определена для конечного числа событий;
- 2) не раскрывает первоначального комплекса условий;
- 3) если классическую вероятность можно определить до опыта, то статистическую вероятность — только после опыта по его результатам.

Среди ученых, которые ставили своей задачей выяснить прикладное значение теории вероятностей и создать теорию, которая максимально удовлетворяла бы потребности естествознания и практики, первым должен быть назван выдающийся немецкий математик Р. Мизес (1883—1953) — основатель частотной теории вероятностей. После прихода к власти Гитлера Мизес эмигрировал в США, где возглавил Институт прикладной математики.

Он относился к числу ученых, которые не признавали теорию вероятностей математической дисциплиной, а считали ее наукой, широко использующей математические методы. Мизес подчеркивал, что с каждой вероятностной задачей связано рассмотрение некоторого реального (а не абстрактного!) процесса, а математика изучает лишь абстрактные явления. Современное развитие теории вероятностей, особенно фундаментальные работы А. Н. Колмогорова, доказали, что теория вероятностей является строгой математической наукой, неразрывно связанной с высшими разделами математики, такими, как теория множеств, теория функций, функциональный анализ, и др.

Вспомним, что и немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943), ставя задачу аксиоматического обоснова-

36

ния теории вероятностей в своих знаменитых проблемах (шестая проблема Гильберта), рассматривал ее как один из разделов физики. Мнения о том, что теория вероятностей не является математической дисциплиной, придерживались и некоторые советские ученые. Так, например, доктор философских наук, профессор математики Э. Кольман в книге «Предмет и метод современной математики» в 1936 г. писал: «Мы займемся лишь одной, принадлежащей к... группе близких математике, но все же отличных от нее отраслей науки — теории вероятностей. Ее предметом является изучение возможности, категории, которую математика не изучает, хотя при изучении ее и применяют математический метод. В теории вероятностей, прежде чем пустить в ход математический метод, нужно сначала установить равновозможность отдельных событий, а этого нельзя сделать математическим путем».

Подчеркнем еще раз, что такой взгляд на теорию вероятностей является анахронизмом, но это отнюдь не дает основания современным математикам относиться свысока к подобным высказываниям. Дело в том, что в них нашла отражение одна отличительная черта теории вероятностей — ее органическая связь с практикой, с проблемами реального мира. Проблема отношения между теорией и данными опыта для теории вероятностей стоит более остро, чем для любой другой математической дисциплины. Пионером рассмотрения этой проблемы бесспорно является Р. Мизес. Имея в виду теорию Р. Мизеса, А. Н. Колмогоров писал: «Существуют также другие системы обоснования теории вероятностей, а именно такие, в которых понятие вероятности не относится к числу основных понятий, а само выражается через другие понятия. При этом стремятся, однако, к другой цели, а именно, по возможности к наиболее тесному смыканию математической теории с эмпирическим возникновением понятия вероятности» (курс. наш. — Авт.).

38

Согласно Мизесу, раз относительная частота (отношение числа благоприятных исходов μ к общему числу исходов n) по мере увеличения опытов все меньше и меньше уклоняется от вероятности p , то в пределе должно быть $p = \lim \mu/n$ при $n \rightarrow \infty$.

По Мизесу, теория вероятностей имеет дело с бесконечными последовательностями результатов испытаний, называемыми коллективами. Коллектив согласно

представлениям Мизеса должен отвечать двум требованиям.

1. Относительные частоты появления какого-либо определенного события в серии независимых испытаний имеют предельное значение.

2. Эти предельные значения не будут меняться, если из всей последовательности выбирать любые подпоследовательности.

Р. Мизес не ставил своей целью создать строгую аксиоматическую теорию, кроме того, его построения приводили к логическому противоречию. Как указывали А. Я. Хинчин и Б. В. Гнеденко, требование иррегулярности оказывается несовместимым с требованием существования предела. В то же время условия, при которых возможно применение теории вероятностей на практике, в настоящее время трактуются по Р. Мизесу. Его выводы были, в частности, использованы А. Н. Колмогоровым при выборе аксиом, положенных в основу аксиоматической теории вероятностей.

Геометрическая вероятность. Следующим определением, которое помогает перейти к бесконечному числу событий и широко используется на практике, является геометрическое определение вероятности.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A , к мере¹ всей области.

Математическими символами данное определение можно записать так:

$$P(A) = \frac{\text{mes } d}{\text{mes } D},$$

где $P(A)$ — геометрическая вероятность рассматриваемого события A ;

$\text{mes } d$ — площадь благоприятной области;

$\text{mes } D$ — площадь всей области.

Рассмотрим задачу. Двое друзей условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами. Каждый ждет другого 20 минут, а затем уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Подробное решение этой задачи любознательный читатель найдет в книге Б. В. Гнеденко «Курс теории ве-

¹ Мера — это сложное математическое понятие, в простейшем случае мерой является площадь фигуры.

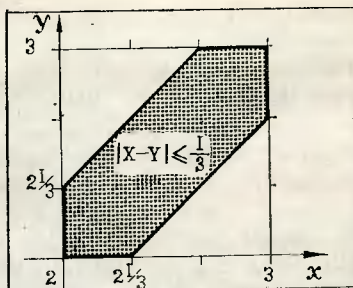


Рис. 1. Геометрическое изображение задачи о встрече: x — время прихода первого друга; y — время прихода второго друга.

роятностей». Мы укажем лишь, что искомая вероятность исчисляется как отношение области, благоприятствующей встрече, ко всей области возможных элементарных исходов (рис. 1). Область, удовлетворяющая неравенству $|x-y| \leq 1/3$, является благоприятной областью. Отношение площади этой области к площади всей области равно $5/9$, т. е. $P(A) = 5/9$.

Аксиоматическая вероятность. Выше отмечалось, сколь важную роль в современном естествознании сыграло аксиоматическое построение теории вероятностей, данное А. Н. Колмогоровым. Познакомим вас с кратким изложением этой теории, хотя не обещаем, что это будет легким чтением, так как рассматриваемые вопросы связаны с высшими и наиболее сложными разделами современной математики. Изложению аксиом Колмогорова предшествует ряд вспомогательных понятий и определений.

σ -алгебра событий. Одним из важнейших понятий аксиоматической теории вероятностей является понятие σ -алгебры событий. Обозначим:
 U — множество элементарных событий,
 F — множество подмножеств множества U (множество событий).

Рассмотрим требования, предъявляемые к множеству F :

- 1) U принадлежит F ;
- 2) если A и B принадлежат F , то $A+B$, $A \cdot B$, \overline{A} , \overline{B} также принадлежат F ;
- 3) если A_1, \dots, A_n, \dots принадлежат F , то их сумма и произведение также принадлежат F .

Если множество F отвечает всем трем требованиям, то оно называется σ -алгеброй событий.

Теперь приведем основные определения аксиоматической вероятности.

1. Множество U называется *достоверным событием*.

2. Множество $V = \bar{U}$ называется *невозможным событием*.

3. Суммой двух событий A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих в A или B , или в A и B .

4. Произведением двух событий A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих одновременно и в A и в B .

5. Противоположным событием \bar{A} называется множество, состоящее из элементов множества U , не входящих в множество A .

Аксиомы Колмогорова. Аксиоматическая теория Колмогорова основывается на четырех аксиомах, с помощью которых вводятся понятия вероятности и некоторые их свойства как для конечного множества элементарных событий, так и для любого бесконечного множества. Вот эти знаменитые аксиомы:

1. Каждому событию A , принадлежащему F , ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$, которое называется вероятностью события A .

2. Вероятность достоверного события $P(U) = 1$.

3. Аксиома сложения. Если A_1, A_2, \dots, A_n попарно не совместны, то $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

4. Расширенная аксиома сложения. Если A_1, \dots, A_n, \dots попарно не совместны, то $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (Здесь счетное¹⁾ множество действий).

5. Аксиома непрерывности. Если события B_1, \dots, B_n — такие события, что каждое последующее событие влечет за собой предыдущее и, кроме того, произведение всех этих событий есть событие невозможное, то $P(B_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Аксиомы 4 и 5 эквивалентны между собой, т. е., принимая аксиому 4 в качестве истинной, можно доказать аксиому 5 и наоборот.

Свойства системы аксиом Колмогорова. Укажем два свойства системы аксиом Колмогорова.

1. Система аксиом Колмогорова непротиворечива, так как существуют реальные объекты, которые удовлетворяют одновременно всем аксиомам Колмогорова

¹ Счетным множеством называется такое множество, элементы которого можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел.

2. Система аксиом Колмогорова неполна. Это значит, что даже при одном множестве элементарных событий U вероятности на множестве F могут быть выбраны многими различными способами.

Неполнота системы аксиом Колмогорова не является недостатком, а, наоборот, обеспечивает ее жизненность, возможность широкого практического применения, так как позволяет в разных задачах рассматривать одинаковые множества случайных событий с различными вероятностями.

Схема Колмогорова. Все основные положения теории вероятностей основываются на наблюдениях, почерпнутых из реального мира, однако для аксиоматического изложения этой науки эмпирическая сторона не играет столь существенной роли — возможно построение вполне завершенной математической теории без физической интерпретации основных понятий этой теории. Совсем иначе обстоит дело в тех случаях, когда теория вероятностей используется для решения конкретных прикладных вопросов — здесь правильное эмпирическое толкование полученных результатов играет первостепенную роль. Правильное понимание соотношения между данными опыта и системой теоретических оценок может предопределить успех или неудачу проводимого научного исследования.

Для прикладников важную роль играет схема применения теории вероятностей к действительному миру опытов. Такая схема была изложена академиком А. Н. Колмогоровым в книге «Основные понятия теории вероятностей». Эта схема сводится к следующему.

1. Предполагается известным некоторый комплекс условий G , который можно повторить неограниченное число раз. Строго говоря, те явления, которые не могут быть повторены неограниченное число раз в одинаковых условиях, лежат за пределами применимости теории вероятностей. Правда, на практике эти требования несколько ослаблены по двум соображениям:

а) число повторений не обязательно должно быть бесконечным, достаточно, чтобы оно было довольно большим;

б) условия проведения опыта не обязательно должны сохраняться в точности, возможны некоторые изменения, но при условии, что разница в проведении отдельных опытов не должна быть существенной.

Понятно при этом, что чем идентичнее будут условия проведения опытов, тем более устойчивыми и надежными будут вероятностные оценки, которые получаются в результате этих опытов.

2. После того, как изучен некоторый первоначальный комплекс условий G и исследователь убедился в стабильности этих условий, приступают к изучению круга событий, которые могут наступить в результате осуществления условий G . При этом рассматриваемые события при практической реализации опыта могут наступать или не наступать. Затем строим множество U , включающее в себя возможные варианты появлений и неоявлений рассматриваемых событий.

3. Во множестве теоретически мыслимых исходов могут быть выделены те или иные подмножества, отвечающие определенным условиям. Предположим, что нами выделено некоторое подмножество A . Если при выполнении условий G окажется осуществленным вариант, принадлежащий множеству A , то говорят, что произошло событие A .

Пусть первоначальный комплекс условий заключается в том, что подбрасывают монету два раза. Круг событий, которые могут произойти в результате осуществления комплекса условий G , состоит в том, что при каждом бросании могут появиться «орел» или «решка». Ясно, что всего возможны четыре различных варианта (элементарных события), а именно «орел» — «орел», «орел» — «решка», «решка» — «орел», «решка» — «решка». Событие A рассматривается как множество исходов с повторением, т. е. из множества всех возможных исходов (множества элементарных событий) выделим то подмножество, которое отвечает условию необходимого повторения «орла» или «решки». Это подмножество состоит из первого и четвертого вариантов: «орел» — «орел», «решка» — «решка».

4. Переход от практики к вероятностному исчислению теперь можно осуществить, если поставить в соответствие каждому событию A некоторое определенное действительное число $P(A)$, называемое вероятностью события A . С практической точки зрения, введение этих количественных оценок будет иметь смысл в том случае, если они будут отвечать по крайней мере двум требованиям.

А. Можно быть уверенным, что, если комплекс усло-

вий будет повторен большое число n раз и если при этом через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет очень мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий σ событие A не будет иметь места.

Схема, изложенная Колмогоровым, получила признание во всем мире. Конечно, ни в какую схему, как бы хороша она ни была, нельзя вместить все огромное многообразие окружающей нас реальной жизни. Тем не менее схема Колмогорова, с одной стороны, удачно отражает то, что встречается на практике, а с другой стороны, позволяет дать строгое математико-вероятностное толкование полученным результатам. Два последних положения (A и B) особенно должны привлечь внимание тех, кто интересуется практическим применением теории вероятностей.

Основанием успешного использования вероятностных методов на практике является одна удивительная особенность окружающей нас действительности — статистическая устойчивость различных величин (подчас поражающая нас своей неожиданностью). Понятие вероятности возникло как отражение этой устойчивости и, естественно, что и применять его нужно в тех ситуациях, когда эта устойчивость проявляется. К сожалению, можно привести много примеров из научной литературы, когда проверка устойчивости не производится. Но основная беда заключается даже не в этом, а в том, что нет в науке достаточно общих методов, позволяющих решить вопросы о существовании статистической устойчивости характеристик тех или иных явлений. Так или иначе пункт A схемы Колмогорова — призыв к осторожности при интерпретации тех или иных вероятностных оценок, призыв к тому, чтобы оценивать наличие статистической устойчивости всеми доступными методами: сугубо математическими или используя представления той или иной конкретной дисциплины.

Последуем принципу: «Сказав A , говори B ». Положение B известно среди вероятностников как «принцип практической невозможности маловероятных событий». Если событие имеет вероятность, отличную от нуля (хотя и очень малую), то в единичном испытании это событие может наступить и не наступить. Но это только

теоретически, на практике люди уже привыкли к тому, что событие, имеющее малую вероятность, не наступает, и поэтому мы, не задумываясь, пренебрегаем им.

Представьте, что вы сидите в кинотеатре и смотрите фильм. Возможно ли, что потолок обрушится и упадет на вашу голову? Теоретически это не исключено. Так почему же зрители спокойно сидят на своих местах, а не бегут стремглав к выходу? Почему действие, происходящее на экране, волнует нас больше, чем мысль о возможной опасности? Все дело в том, что вероятность такого события ничтожно мала и наш жизненный опыт подсказывает нам, что этим событием можно пренебречь, т. е. практически можно быть уверенным, что оно не произойдет. Это и есть «принцип практической невозможности маловероятных событий».

51

Выясним, что означает термин «ничтожно мала». Чему должна быть численно равна вероятность события, чтобы было обоснование принять ее ничтожно малой, т. е. попросту пренебречь возможностью появления данного события? Дать ответ на этот вопрос в рамках математической теории не представляется возможным. И вот почему. Представьте, что рабочий обрабатывает на токарном станке детали, при этом в среднем из 100 деталей одна деталь оказывается бракованной. Можно ли пренебречь вероятностью брака в данном случае? Пожалуй, можно, и рабочий будет считаться неплохим специалистом.

52

Теперь рассмотрим другой случай. Допустим, что в городе, где вы живете, строители будут строить дома так, что из 100 домов (в среднем) в одном доме будет наблюдаться разрушение кровли. Можно ли пренебречь вероятностью этих событий и спокойно жить в таких домах? Как говорится, комментарии излишни.

Итак, мы установили, что для того, чтобы судить о том, велика или мала вероятность события, нужно в первую очередь принимать во внимание, о каких событиях идет речь.

Исторический экскурс. Рассмотрим небольшой пример. При всей его простоте и незамысловатости он сыграл решающую роль в том, что классическая теория вероятностей уступила место современной аксиоматической теории вероятностей.

53

Имеется отрезок AB . Выберем на этом отрезке точку C и будем бросать случайным образом на отрезок AB

другую материальную точку D . Какова вероятность, что мы попадем точкой D в точку C ?

Если пользоваться представлениями классической теории вероятностей, то нужно рассуждать примерно так: весь отрезок состоит из бесчисленного количества точек, а благоприятствует исходу лишь одна точка, причем все исходы несовместны, единственно возможны и равновозможны, поэтому искомая вероятность может быть определена как отношение единицы к бесконечности, т. е. равна нулю. Но, с другой стороны, событие «попадание в точку C » является возможным.

Таким образом, возникало противоречие, которое подрывало имевшиеся представления ученых о вероятности. Выход был один: объявить, что классическая вероятность пригодна для конечного числа случаев (это то, что сейчас принято называть элементарной теорией вероятностей), а для бесконечного числа случаев она не пригодна. Такой подход не мог устраивать практиков, ведь на практике чаще приходится сталкиваться именно с бесконечным числом исходов. Например, количество точек, в которые может попасть снаряд, выпущенный из орудия, бесконечно, температура вулканизации резины может принимать бесконечное число значений (в пределах допуска) и т. д.

Так как в случае бесконечного числа исходов не было практических приемов исчисления вероятностей, то от специалистов требовалось по крайней мере разработать концепцию, которая могла теоретически разрешить создавшееся противоречие. В связи с усилившимся вниманием (после открытия геометрии Лобачевского) к вопросам обоснования наук многие ученые приходили к мысли о том, что теория вероятностей нуждается в пересмотре логических основ.

Наиболее четко эту мысль выразил немецкий математик Д. Гильберт в конце XIX столетия. В знаменитом докладе, который он сделал на II Международном математическом конгрессе 8 августа 1899 г., были сформулированы 23 проблемы. Их решение математики XIX в. завещали математикам нашего столетия. Среди этих проблем под номером 6 стояла задача аксиоматического обоснования теории вероятностей, которую Д. Гильберт сформулировал так: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дис-

циplin, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь *теория вероятностей и механика*» (курс наш. — Авт.).

Ряд работ по аксиоматическому обоснованию теории вероятностей не дали удовлетворительного решения задачи, поставленной Гильбертом. Лед тронулся, пожалуй, только тогда, когда французский математик Э. Борель подметил глубокую аналогию между понятием вероятности и одним из наиболее важных понятий математики — мерой Лебега.

Борель явился инициатором рассмотрения вероятности как меры. Именно на этом пути Колмогоров дал наиболее удачное аксиоматическое обоснование теории вероятностей. Вероятность, определенная как мера, обладает свойствами, отличающимися от свойств классической вероятности, и одно из них следующее: существуют события, которые возможны, но их вероятности равны нулю. В книге «Случай», которая была издана в Париже в 1914 г., Борель доказывает это.

Вот его рассуждения. Рассмотрим отрезок AB , нанесем на этот отрезок точки $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ и т. д. Окружаем каждую точку интервалом. Причем у каждой следующей точки интервал на порядок (т. е. в 10 раз) меньше. Так, вокруг точки 0 берем интервал $0,1$; вокруг точки 1 интервал $0,01$, тогда вокруг точки $\frac{1}{2}$ интервал будет равен $0,001$ и т. д. Суммарная длина интервалов равна $l = 0,1 + 0,01 + \dots < \frac{1}{9}$. Но начальный интервал можно взять сколь угодно малым и, следовательно, сделать меньше сколь угодно малого наперед заданного числа, т. е. l будет стремиться к нулю.

ПРОИГРАННОЕ ПАРИ

Алгебра событий. Мы привыкли к тому, что математические действия выполняются в основном над числами или буквами. Но оказывается, что их можно производить и над событиями. Этим и занимается раздел математики, который называется «алгебра событий». Но здесь мы имеем дело не с той алгеброй, к которой привыкли в школе, а с совершенно иной наукой.

В алгебре событий действия над событиями (сложение, умножение, вычитание) вводятся путем обобщения

известных математических действий над числами и буквенными выражениями.

Суммой двух событий A и B будем называть событие C , состоящее в появлении или события A или события B , или события A и B вместе.

Произведением двух событий A и B называется такое событие C , которое состоит в одновременном появлении событий A и B .

Разностью между двумя событиями A_1 и A_2 называется событие A , состоящее в появлении события A_1 и непоявлении события A_2 .

Для сокращенного обозначения этих действий в алгебре событий используют те же символы, что и в обычной алгебре. Сокращенная запись трех приведенных определений будет выглядеть так:

для сложения $C = A + B$;

для умножения $C = A \cdot B$;

для вычитания $A = A_1 - A_2$.

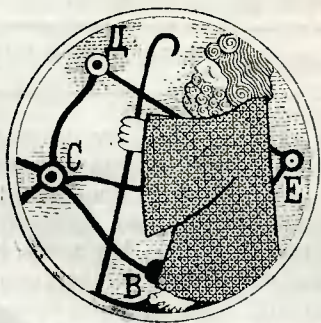
Приведенные определения легко обобщаются на случай многих событий.

Поясим на примере сложение двух событий. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Событие A — 1-й стрелок попал в цель; событие B — 2-й стрелок попал в цель; событие C — хотя бы один стрелок попал в цель.

В алгебре событий рассматривается еще одно понятие — противоположные события. Два единственно возможных и несовместных события называются *противоположными событиями*. Они обозначаются A и \bar{A} . На-

пример, если контролер проверяет деталь, то могут быть два несовместных и единственно возможных события, т. е. два противоположных события: «деталь годная» и «деталь негодная».

Таким образом, с помощью алгебры событий оказалось возможным выполнять действия над событиями. Это значительно расширило возможности практического применения математики.



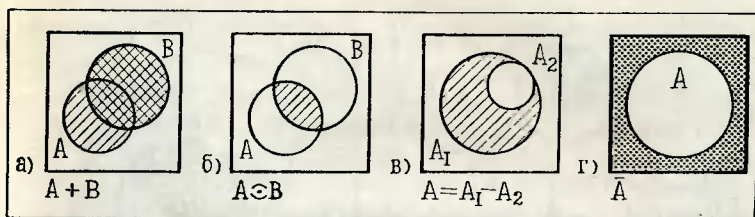


Рис. 2. Диаграммы Вьенна:

а — сумма событий; б — произведение событий; в — разность событий; г — противоположные события.

Л. 2. 12

Диаграмма Вьенна. Действия над событиями становятся более наглядными, если придать им геометрическую интерпретацию. Изображать события в виде диаграмм одним из первых предложил математик Вьенн, именем которого они и были названы.

Рассмотрим, например, как можно интерпретировать графически сумму двух событий A и B (рис. 2). Все возможные элементарные исходы представим в виде совокупности точек некоторого квадрата. Обе совокупности точек A и B изобразим в виде двух кругов, причем, если события несовместные, круги не имеют общих точек, а если события совместные, то круги будут пересекаться.

Геометрически сумму событий A и B будет выражать область, включающая в себя все точки, принадлежащие или кругу A , или кругу B , или одновременно и A и B . Рис. 2,а и есть диаграмма Вьенна, отвечающая сумме событий A и B . Аналогичным образом интерпретируется и произведение двух событий A и B — это область, включающая в себя точки, принадлежащие одновременно и кругу A и кругу B (рис. 2,б). На рис. 2,в показана диаграмма Вьенна для разности событий, а на рис. 2,г для противоположных событий.

Основные формулы теории вероятностей. Совместные и несовместные события. В предыдущем разделе были рассмотрены несовместные события. В теории вероятностей изучаются также совместные события.

Несколько событий называются *совместными*, если появление одного из них в единичном испытании не исключает появления других событий в этом же испытании.

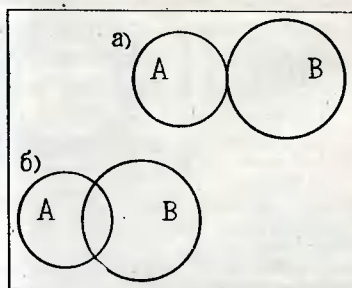


Рис. 3. Изображение несовместных (а) и совместных (б) событий.

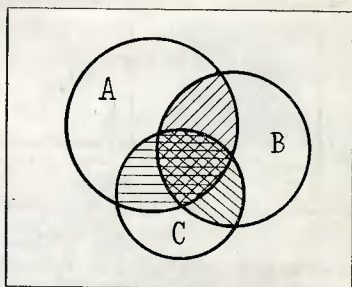


Рис. 4. Три совместных события.

Рассмотрим примеры совместных и несовместных событий. Пусть A — скоростная плавка; B — плавка, соответствующая ГОСТу; A и B — совместные события, т. е. одна и та же плавка может быть скоростной и соответствовать ГОСТу.

Теперь предположим, плавка A соответствует ГОСТу, плавка B не соответствует ГОСТу, понятно, что A и B — несовместные события.

Графическое изображение совместных и несовместных событий показано на рис. 3. Этот рисунок иллюстрирует формулы сложения вероятностей.

Для двух несовместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Для двух совместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Аналогичным образом рис. 4 объясняет формулу для вероятности суммы трех совместных событий. Складываем площади трех кругов, а затем вычитаем их попарно общие части. Но тогда участок, общий для всех трех кругов, в итоге останется неучтенным. Чтобы не нарушить равенства, в правой части следует прибавить вероятность, соответствующую этому участку. Тогда имеем:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Пример. Два стрелка стреляют по цели. Вероят-

ность попадания в цель одного стрелка 0,8, вероятность попадания второго — 0,7. Какова вероятность поражения цели, если каждый стрелок делает по выстрелу?

Обозначим: A — попадание в цель первого стрелка; B — попадание в цель второго стрелка. Эти события совместны, так как попадание одного стрелка в цель не исключает возможности попадания и другого стрелка. Поэтому для решения задачи воспользуемся формулой сложения вероятностей двух совместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

(вычисление $P(AB)$ поясняется ниже).

Подставляя значения вероятностей, получим:

$$P(A + B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

Зависимые и независимые события. Для дальнейших рассуждений необходимо ввести понятия зависимых и независимых событий.

Два события называются зависимыми, если вероятность одного события зависит от появления или не появления другого.

Два события называются независимыми, если вероятность одного события не зависит от появления или не появления другого.

Несколько событий называются независимыми в совокупности, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть события независимые.

Несколько событий называются попарно независимыми, если любые два из этих событий независимы.

Требование независимости в совокупности сильнее требования попарной независимости. Это значит, что несколько событий могут являться попарно независимыми, но при этом они не будут независимыми в совокупности. Если же несколько событий независимы в совокупности, то из этого следует их попарная независимость.

В связи с тем, что в дальнейшем часто нужно будет рассматривать вероятности одних событий в зависимости от появления или не появления других, то необходимо ввести еще одно понятие.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B , вычисленная при условии, что событие A уже произошло.

Произведение вероятностей независимых и зависимых событий вычисляется по известным формулам.

Для двух независимых событий формула имеет вид:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, т. е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Для двух зависимых событий формула запишется так $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$, т. е. вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго в предположении, что первое событие уже произошло.

Обе формулы обобщаются для многих событий.

Пример. 90% продукции завода — стандартные изделия, из них 80% — первого сорта. Какова вероятность, что взятое наугад изделие первого сорта?

Обозначим через A , что взятое наугад изделие будет стандартным, через B — взятое наугад изделие первого сорта. Нетрудно видеть, что события A и B зависимые, следовательно, используем формулу для вычисления вероятности произведения двух зависимых событий.
 $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72$.

Следующие три формулы, которые приводятся, играют важную роль в применениях теории вероятностей. Они получены для наиболее часто встречающихся на практике ситуаций, и поэтому мы покажем, как они выводятся и используются при решении задач.

Вероятность появления хотя бы одного события.

В жизни, науке, производстве часто возникают такие ситуации (математики их называют схемами событий), когда нужно вычислить вероятность появления хотя бы одного события из некоторого набора возможных событий. Например, если вы купили несколько лотерейных билетов, то вас интересует вероятность того, что хотя бы один из них окажется выигрышным. Если по цели противника сделан залп из нескольких орудий, то интересует вероятность того, что цель будет поражена, т. е. что хотя бы один снаряд попадет в цель.

Математически такую схему событий можно представить следующим образом. Имеются n независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n , причем известны вероятности $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ появления каждого из этих событий. Требуется определить вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий.

Обозначим A — появление хотя бы одного из событий A_1, A_2, \dots, A_n , \bar{A} — непоявление ни одного из событий A_1, A_2, \dots, A_n . Тогда событие A можно выразить через исходные события, т. е. $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$.

На основании свойств противоположных событий имеем:

$$\begin{aligned}P(A + \bar{A}) &= 1; \\P(A) + P(\bar{A}) &= 1; \\P(A) &= 1 - P(\bar{A}).\end{aligned}$$

Используя приведенное выше выражение для \bar{A} , получим $P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n)$.

Применяя теорему о вероятности произведений, будем иметь $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)$.

Это и есть общая формула для вычисления вероятности появления хотя бы одного события.

На практике наиболее часто встречаются такие случаи, когда вероятности исходных событий равны между собой, т. е. $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$.

Если обозначить $q = 1 - p$ и подставить в общую формулу, то получим $P(A) = 1 - q^n$. Это частный случай, но тем не менее на практике преимущественно с ним приходится иметь дело.

Полная вероятность. Прежде чем дать вывод формулы полной вероятности, решим задачу о слепом старце. Слепой старец вышел из пункта A в пункт B без поводыря (рис. 5). Какова вероятность того, что он придет в пункт B ?

Так как предполагается, что слепой старец случайным образом выходит на ту или иную дорогу, то вероятность попасть в каждый из промежуточных пунктов C , D , E равна для него $1/3$. Но далее из каждого пункта он попадет в пункт B с различной вероятностью. Для пункта C эта вероятность равна $1/3$ (так как из него идут три дороги), для пункта D — $1/2$ (так как из него идут две дороги), для пункта E — 1 (так как из него идет одна дорога).

Таким образом, общая вероятность того, что слепой старец попадет из пункта A в пункт B (такая вероятность называется *полной вероятностью*), равна

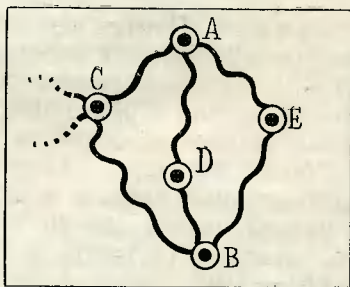


Рис. 5. К задаче о слепом старце.

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{18}.$$

Математически такую ситуацию можно представить следующим образом. Событие B происходит с одним и только с одним из несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n . Известны вероятности этих событий $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$. Кроме того, известны условные вероятности события B при условии, что события A_1, A_2, \dots, A_n произошли. Эти вероятности обозначим $P_{A_i}(B)$, где i принимает значения от 1 до n . Требуется вычислить полную вероятность $P(B)$.

Событие B можно выразить через исходные события так:

$$B = \sum_{i=1}^n BA_i \quad \text{или} \quad P(B) = P\left(\sum_{i=1}^n BA_i\right).$$

Применяя формулу для вероятности суммы несовместных событий, получим:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i).$$

Так как событие B и A_i зависимы, то используем формулу для вероятности произведения двух зависимых событий

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P_{A_i}(B).$$

Пример. Партия деталей изготовлена двумя рабочими ($n=2$). Первый рабочий изготовил $\frac{2}{3}$ партии, второй — $\frac{1}{3}$ партии. Вероятность брака для первого рабочего 1%, а для второго 10%. На контроль взяли одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

Обозначим через A_1 и A_2 — детали, изготовленные соответственно первым и вторым рабочим, B — взятую из партии наугад деталь, которая оказалась бракованной, тогда $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$, $P_{A_1}(B) = 1/100$, $P_{A_2}(B) = 1/10$.

Формула полной вероятности при $n=2$ имеет следующий вид:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B).$$

Подставляем в правую часть известные вероятности и находим

$$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{100}, \text{ т. е. } 4\%.$$

Это и есть искомая вероятность.

Формулы Бейеса (формулы переоценки вероятности гипотез). На практике часто приходится производить переоценку тех или иных первоначальных гипотез. Например, врач, осмотрев больного, сделал предположение о наличии нескольких заболеваний. Получив результаты анализов, он делает переоценку первоначальных гипотез. Некоторые первоначальные предположения отбрасываются, и ставится окончательный диагноз.

Математически рассматриваемая схема совпадает с той, которая была принята для случая полной вероятности. Однако теперь необходимо сделать переоценку вероятностей исходных событий (или гипотез) после того, как в испытании произошло некоторое событие B . Тогда будем иметь:

$$P(B \cdot A_i) = P(B) \cdot P_B(A_i) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(B).$$

Из полученного равенства находим:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Подставляя выражение для полной вероятности, имеем:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)},$$

где $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, n$.

Эта формула из уважения к заслугам английского математика Томаса Бейеса (1702—1761) названа его именем. Любопытно, что этой формулы Бейес не выводил, хотя у него есть ряд интересных работ по теории вероятностей.

Пример. Предположим, что в предыдущей задаче деталь, взятая на контроль, оказалась бракованной. Ис-

7 пользуя формулу Бейеса, оценим вероятность того, что эта деталь изготовлена вторым рабочим.

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2) \cdot P_{A_2}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{4}{100}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

74 Как видим, вероятность того, что бракованная деталь изготовлена вторым рабочим, велика. Это отвечает реальному смыслу примера, так как брак почти всей партии был по вине второго рабочего.

В связи с возросшими требованиями к качеству выпускаемой продукции вероятностный контроль качества имеет большое значение в практике. Во многих случаях на производстве невозможно организовать сплошной контроль качества, и тогда прибегают к выборочному контролю, который в значительной степени базируется на применении методов теории вероятностей и математической статистики.

— Задача. Вывести формулу, выражающую зависимость вероятности того, что партия стальных листов будет забракована: 1) от доли бракованных листов партии; 2) от общего количества листов в партии; 3) от количества контролируемых листов при первичных и повторных испытаниях.

15 Выборочный контроль в современном прокатном производстве организован следующим образом. От партии стальных листов берется на контроль так называемая первичная выборка, состоящая из n листов. Если после проведения испытаний образцов, вырезанных из этих листов, окажется, что все взятые на контроль листы удовлетворяют предъявляемым требованиям по механическим свойствам, то вся партия из N листов отправляется заказчику.

Если же в первичной выборке хотя бы один лист окажется бракованным, т. е. не отвечающим требованиям по механическим свойствам, то для проверки берется так называемая вторичная выборка из v листов. Если при испытаниях вторичной выборки хотя бы один лист окажется бракованным, то бракуется вся партия.

— Для того, чтобы вычислить итоговую вероятность Q при любом методе контроля, необходимо знать среднестатистическую вероятность брака p одного листа. Эта

вероятность определяется статистически по результатам предыдущих испытаний механических свойств стальных листов.

Если в партии имеются бракованные листы, то только при сплошном контроле их можно обнаружить наверняка. При выборочном же контроле брак можно и не обнаружить. Безусловно, выборочный контроль нужно организовать таким образом, чтобы вероятность обнаружения брака была ближе к единице, а сам метод контроля был бы не очень громоздким.

Если первичному испытанию подвергаются u листов от партии, то вероятность обнаружения i плохих листов будет равна $P_u(i) = C_u^i p^i (1-p)^{u-i}$ (вывод на стр 41).

При этом для соответствующих значений u и i можно вычислить вероятность обнаружения хотя бы одного плохого листа при повторном испытании, если повторному контролю подвергаются v листов. В самом деле, если после первичных испытаний в партии остается $N-u$ листов, из них плохих $Np-i$ листов, следовательно, вероятность обнаружения плохого листа при единичном испытании составит

$$\frac{Np-i}{N-u}.$$

Тогда вероятность обнаружения хотя бы одного плохого листа при контроле v листов составит

$$P_v = 1 - \left(1 - \frac{Np-i}{N-u}\right)^v.$$

Если произведение вероятностей $P_{u,i} \cdot P_v$ просуммировать по i , получим формулу для оценки вероятности обнаружения брака:

$$Q = \sum_{i=1}^n C_u^i p^i (1-p)^{u-i} \left[1 - \left(1 - \frac{Np-i}{N-u}\right)^v\right].$$

Анализ этой формулы позволил выявить ряд важных для практики закономерностей. Так, например, зависимость Q от u при $p=1/2$ и $N=60$ имеет вид, изображенный на рис. 6. Значения для p и N взяты не случайно, они соответствуют тем, которые наиболее часто встречаются на практике.

Из графика видно, что увеличивать объем первичной выборки свыше трех не имеет смысла, так как за-

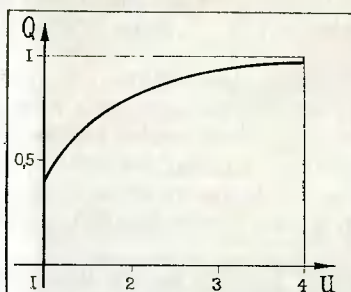


Рис. 6. Зависимость вероятности обнаружения брака от объема первичной выборки.

траты труда на организацию контроля существенно возрастают, а вероятность обнаружения бракованных листов практически не повышается.

Схема Бернулли. Ранее были рассмотрены вероятности событий, возникающих в результате единичных испытаний, однако наибольший интерес представляют сложные события. На практике часто встречается такая схема событий, при которой ис-

пытания повторяются. Эта схема называется *схемой повторных испытаний*, или *схемой Бернулли*.

Пример 1. Вы приобрели несколько лотерейных билетов и желаете знать вероятность выигрыша. Покупка каждого билета есть не что иное, как испытание, а исходом этого испытания является выигрыш, т. е. случайное событие. Покупка нескольких билетов уже образует схему повторных испытаний.

Пример 2. Рабочий изготавливает на станке однотипные детали. Каждая деталь может оказаться годной или бракованной. Если рассматривать с этой точки зрения все детали, то опять имеем дело со схемой повторных испытаний.

Легко заметить, что ситуация, возникающая в схеме Бернулли, является весьма жизненной, и потому исследование именно этой схемы в первую очередь привлекло математиков. Значение всех вопросов, связанных со схемой Бернулли, значительно возросло в последнее время в связи с увеличением масштабов производства и повышенным вниманием к контролю качества выпускаемой продукции.

Дадим математическую формулировку задачи, возникающей в схеме Бернулли, и выведем формулу для вычисления соответствующих вероятностей.

Вероятность появления события A в единичном испытании постоянна и равна p , причем $0 < p < 1$. Какова вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз?

Обозначим буквой B_i одну комбинацию элементарных исходов, в которой событие A наступило k раз, а $n-k$ раз не наступило. Выразим B_i через исходные события, причем предположим, что в первых k испытаниях событие A произошло, а в следующих $n-k$ испытаниях событие A не произошло:

$$B_i = \underbrace{AAA \dots AAA}_{k} \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}\bar{A}}_{n-k}.$$

Переходя к вероятностям событий, имеем:

$$P(B_i) = p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

так как события независимы;

$$P(B_i) = p^k \cdot q^{n-k},$$

так как $q = 1-p$;

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

т. е.

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученная формула называется *формулой Бернулли*. Она имеет широкое применение на практике.

Вычисление вероятностей сложных событий. Для решения практических задач часто возникает необходимость определения вероятностей весьма сложных событий. Для этого сложное событие представляется в виде суммы или произведения более простых (элементарных) событий, вероятности которых известны или легко могут быть определены. Используя выведенные выше теоремы сложения и умножения вероятностей, можно вычислить вероятность сложного события по вероятностям элементарных событий.

Здесь возникает следующая трудность. Как правило, объекты и события, изучаемые на практике, очень сложные. Взаимосвязи между элементарными событиями весьма разнообразны и тоже довольно сложно переплетены. Искусство экспериментатора, составляющее основу статистического «ремесла», в том и состоит, чтобы отвлечься от несущественного и правильно выбрать абстрагированную схему изучаемого события. Тогда теоремы и формулы теории вероятностей используются уже применительно к абстрагированной схеме. Если схема изучаемого события выбрана правильно, дальнейшие вычисления являются делом техники.

Пример. Новые приборы при изготовлении подвергаются всесторонним испытаниям на прочность, вибрацию и всякого рода перегрузки. Предположим, что вероятность p опасной перегрузки для прибора при единичном опыте равна 0,4. Экспериментатор решил провести с прибором три опыта. При этом известно, что вероятность поломки прибора при однократной перегрузке—0,2, при двукратной—0,5 и при трехкратной—0,8. Имеется опасность, что прибор после проведения этих опытов может сломаться, что нежелательно. Определим, какова вероятность поломки прибора при трех опытах.

Обозначим через B событие — поломка прибора, A_1 — событие, состоящее в однократной перегрузке прибора, A_2 — двукратной и A_3 — трехкратной перегрузке.

Нетрудно заметить, что схема данной задачи отвечает условиям формулы полной вероятности. Значит, искомая вероятность выразится через вероятности элементарных событий следующим образом:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \\ + P(A_3) \cdot P_{A_3}(B).$$

Вычислим вероятности, входящие в правую часть равенства. Сначала оценим вероятность наступления однократной, двукратной и трехкратной перегрузок (в трех опытах). Для этого используем формулу Бернулли. Так как по условию задачи $p=0,4$, можем вычислить q .

$$q = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Так как общее число опытов $n=3$, возможная перегрузка может наступить в одном, двух или даже трех испытаниях.

Тогда по формуле Бернулли найдем, что

$$P(A_1) = P_3(1) = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^2 = 0,432;$$

$$P(A_2) = P_3(2) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^1 = 0,288;$$

$$P(A_3) = P_3(3) = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^0 = 0,064.$$

По условию задачи известно, что вероятность поломки прибора при однократной перегрузке равна 0,2 т. е. $P_{A_1}(B) = 0,2$; вероятность поломки прибора при двукратной перегрузке $P_{A_2}(B) = 0,5$; а при трехкратной $P_{A_3}(B) = 0,8$.

Теперь по формуле полной вероятности вычислим вероятность поломки прибора при трех опытах:

$$P(B) = 0,432 \cdot 0,2 + 0,288 \cdot 0,5 + 0,064 \cdot 0,8 = 0,2816,$$

т. е. вероятность поломки прибора, а следовательно, и риск экспериментатора весьма значительны.

Теоремы Лапласа. Использование формулы Бернулли связано с колоссальными вычислениями. Продемонстрируем это на примере. Предположим, что вероятность вступления в законную силу вердикта народного суда по гражданскому делу равна 0,9. В течение месяца судья принял решение по 50 гражданским делам. Какова вероятность того, что 30 из них вступят в законную силу без кассационного рассмотрения? Тогда по формуле Бернулли получим:

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!20!} \cdot (0,9)^{30} \cdot (0,1)^{20}.$$

Вычислить до конца без помощи вычислительной техники не представляется возможным, так как только $20! = 24 \text{ млн.} \cdot 10^{11}$ (Всего 19 цифр).

Упростить вычисления позволяет локальная теорема Лапласа.

Если вероятность появления события A в единичном испытании постоянна и равна p ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A в серии из n независимых испытаний появится ровно k раз, приближенно равна значению функции

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n p q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{n p q}}.$$

Некоторым обобщением локальной теоремы является интегральная теорема Лапласа.

Если вероятность появления события A в единичном испытании постоянна и равна p ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A в серии из n независимых испытаний появится от k_1 до k_2 раз, приближенно равна значению определенного интеграла

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Применяя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Пример. В мартеновском цехе металлургического завода не каждая плавка отвечает требованиям, обусловленным в заказе. Поэтому, как правило, руководство цеха планирует заведомо большее количество плавов. Предположим, что по заказу нужно выплавить 90 плавов, а запланировано 100. Какова вероятность того, что заказ будет полностью выполнен, если вероятность получения каждой назначенной плавки по заказу равна 0,9?

Очевидно, что заказ будет выполнен в том случае, когда число плавов, отвечающих требованиям заказа, будет равно 90 или более. Искомую вероятность находим по интегральной теореме Лапласа.

Запишем исходные данные задачи $p=0,9$, $k_1=90$, $k_2=100$. Вычисляем

$$x' = \frac{90 - 100 \cdot 0,9}{\sqrt{100 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = 0, \quad x'' = \frac{100 - 100 \cdot 0,9}{\sqrt{100 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{10}{3},$$

$$P_{100}(90, 100) = \Phi(3,33) - \Phi(0) \approx 0,5.$$

Как видно, даже при планировании десяти плавов сверх заказа вероятность того, что заказ полностью будет выполнен, составляет 0,5. Отсюда можно сделать практический вывод о том, что нецелесообразно увеличивать количество плавов, а нужно стремиться к тому, чтобы каждая плавка отвечала требованиям заказа.

Схема Бернулли не является математической абстракцией. Многие реальные производственные процессы поддаются формализации и описанию в виде схемы Бернулли (правда, всегда с той или иной степенью приближения). В этих случаях для вычисления искомых вероятностей пользуются формулами Лапласа.

Рассмотрим производственную ситуацию, которая математически может быть описана формулами, выведенными для схемы Бернулли, при этом воспользуемся результатами исследовательской работы, выполненной на Златоустовском металлургическом заводе.

Задача. В мартеновском цехе металлургического

завода установлены в ряд четыре мартеновские печи. По рабочей площадке перед ними движутся многотонные вагонетки, на которых стоят мульды, груженные зава-лочным материалом. Отметим, что завалка—наиболее трудоемкая операция в процессе мартеновской плавки.

Хорошо, если завалка на всех печах проходит в разное время, но если периоды завалки совпадают по времени на двух или трех печах, то жарко приходится сталеварам и их подручным. Когда же совпадение периодов завалки произойдет сразу на четырех печах, то положение становится критическим. В связи с этим при нормировании труда и планировании работы мартеновского цеха важна такая характеристика, как вероятность совпадения периодов завалки по времени на двух, трех и четырех печах. Эти характеристики можно получить, используя формулы, выведенные для схемы Бернулли.

В качестве математической модели процесса с весьма хорошим приближением может служить формула Лапласа. После введения некоторых упрощающих обозначений имеем:

$$P_t = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{npq}}, \quad t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

где P_t — вероятность события, в рассматриваемом случае вероятность различных совпадений периодов завалок;

n — число испытаний, в нашем случае — число печей;

m — число печей, одновременно находящихся под завалкой;

p — вероятность появления завалки на одной печи в данный момент времени;

q — вероятность того, что событие не произойдет, т. е. что в данный момент времени завалка не наступит;

$\varphi(t)$ — функция Лапласа, определяется по статистическим таблицам.

Вероятности p и q определяются статистическим методом путем обработки данных о работе печей.

Вычисление вероятностей совпадений периодов завалки по этой формуле приведено в таблице, см. стр. 46.

Таким образом, из таблицы видно, что вероятность совпадения периодов завалки на трех печах составляет 0,05, т. е. 5%, а на четырех — еще меньше. Следова-

Число печей, одновременно находящихся под завалкой	$0,8\sqrt{npq}$	$m - np$	t	$\varphi(t)$	P_t
0	0,75	-1,38	-1,79	0,080	0,11
1,0	0,75	-0,33	-0,44	0,362	0,48
2,0	0,75	0,67	0,9	0,266	0,35
3,0	0,75	1,67	2,2	0,035	0,05
4,0	0,75	2,67	3,56	0,004	0,005

тельно, при плановых расчетах нужно исходить из возможности совпадения завалок на двух печах.

Случайные величины. Если в арифметике объектами изучения являются числа, в алгебре переменные величины, то теория вероятностей изучает в качестве своих основных объектов случайные величины. Случайная величина является некоторым расширением или обобщением понятия переменной величины.

Будем называть *случайной величиной* такую переменную величину, которая принимает значения, зависящие от случая, и при этом можно определить вероятности этих значений. Так же, как и переменные величины, случайные величины подразделяются на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная случайная величина задается законом распределения вероятностей, а непрерывная случайная величина — функцией распределения вероятностей.

Рассмотрим на примере, что представляет собой *закон распределения вероятностей*. Допустим, что обувная фабрика изготавливает обувь определенных размеров. Очевидно, что недостаточно указать только номера размеров обуви. Важно также определить, сколько пар обуви того или иного размера должна изготовить фабрика, т. е., как говорят математики, установить частоту каждого размера обуви (иными словами, установить долю каждого размера среди других размеров). Например, сколько должно быть изготовлено 41-х размеров обуви и какую часть они будут занимать среди всех остальных, т. е. какова вероятность изготовления того или иного размера.

Перечисление всех размеров обуви с указанием их вероятности и есть закон распределения случайной вели-

чины X , т. е. соотношение размеров обуви, изготавливаемых на фабрике. Как правило, закон распределения вероятностей задается в виде следующей таблицы:

Значения случайной величины x_i	x_1 размер 35)	x_2 (размер 36)	... x_n (размер 45)
Вероятности p_i соответствующих значений случайной величины	p_1 (100 пар)	p_2 (150 пар)	... p_n (70 пар)

Вы, наверное, обратили внимание на то, что случайную величину X мы обозначили прописной буквой латинского алфавита, а строчными ($x_1, x_1, x_2, \dots, x_n$) — значения, которые эта величина принимает. Такое обозначение принято в теории вероятностей.

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины получается как обобщение закона распределения вероятностей случайной величины. В связи с тем, что в книге рассматриваются в основном дискретные случайные величины, мы не останавливаемся более подробно на объяснении непрерывных случайных величин.

Числовые характеристики случайных величин. Из рассмотренного нами примера с обувной фабрикой (производство обуви) видно, что задание случайной величины при помощи закона распределения вероятностей (т. е. в виде таблицы) является громоздким и неудобным. Естественно, возникает мысль о том, нельзя ли характеризовать случайную величину какими-либо числами, которые суммарно описывали бы закон распределения вероятностей и давали бы информацию о случайной величине более сжато или, как говорят математики, в более свернутом виде.

Оказывается, можно. Такие числа называются *числовыми характеристиками случайных величин*. Основными числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности. Согласно определению

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где x_i — значения дискретной случайной величины;

p_i — вероятность соответствующих значений случайной величины;

Σ — знак суммы.

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания. Согласно определению

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Однако на практике для вычисления дисперсии пользуются не этой формулой, а другой, которая получается из нее путем простейших математических преобразований:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Поясним на примерах, какова роль числовых характеристик случайных величин на практике. Если нужно сравнить две марки стали по уровню ударной вязкости, то совсем необязательно приводить полностью законы распределения вероятностей значений вязкости, а достаточно для каждой марки стали вычислить математическое ожидание ударной вязкости. При этом лучшей будет признана та марка стали, у которой математическое ожидание окажется выше.

Известно, что при одинаковом значении математического ожидания более качественным является стальной лист, имеющий минимальный разброс механических свойств. Если вырезать образцы у двух стальных листов, в одних и тех же точках поверхности и, испытав эти образцы, определить механические свойства, то степень разброса механических свойств будет характеризоваться дисперсией. Тот лист лучше, у которого меньше значение дисперсии, т. е. меньше разброс механических свойств.

БИТ ИЛИ НЕ БИТ!

Вероятность и информация. К числу основных понятий теории вероятностей относится понятие информации. В последние годы на границе между точными и гумани-

тарными науками был создан целый ряд новых научных дисциплин, синтезировавших абстрактно-математический метод точных наук и описательный метод наук гуманитарных. Это: инженерная психология, статистическое металловедение, эконометрика, теория принятия решений, теория игр, математическая лингвистика, исследование операций и т. д.

К числу этих наук относится и теория информации. Первые работы по статистической теории информации опубликовал американский математик и инженер К. Шеннон в 1948 г. В настоящее время эта наука получила широкое развитие и применение. Понятие информации тесно связано с понятием неопределенности. Информация о состоянии системы имеет смысл только при наличии некоторой неопределенности относительно состояний этой системы. Например, донесение разведки о местонахождении противника имеет смысл, если это местонахождение не было известно заранее.

Можно ли измерить степень неопределенности системы? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим три примера: подбрасывание монеты, игральной кости и изготовление детали.

Пример 1. A — подбрасывание монеты, A_1 — выпадение «орла», A_2 — выпадение «решки». Очевидно,

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. B — подбрасывание игральной кости, B_1, \dots, B_6 — выпадение той или иной грани.

Очевидно, $P(B_1) = \dots = P(B_6) = \frac{1}{6}$.

Пример 3. C — изготовление детали, C_1 — без брака, C_2 — с браком.

Предположим, что брак для данного типа деталей составляет 1%, тогда $P(C_1) = \frac{99}{100}$,

$$P(C_2) = \frac{1}{100}.$$



Следуя терминологии, принятой в теории информации, будем называть каждый из рассмотренных примеров (подбрасывание монеты, подбрасывание игральной кости, изготовление детали) системой. Система характеризуется двумя параметрами: количеством возможных состояний и вероятностями этих состояний. Выясним, как зависит неопределенность системы от этих двух параметров. Если сравнивать между собой первую и вторую системы, то можно отметить, что первая система (монета) может принимать всего два возможных состояния — выпадение «орла» или выпадение «решки», а вторая система (игральная кость) — шесть возможных состояний — выпадение одного очка, двух очков и т. д. В то же время неопределенность второй системы больше, чем неопределенность первой системы. Из этого можно сделать первый вывод: неопределенность системы зависит от числа возможных состояний системы.

Но если сравнивать между собой первую (монета) и третью (деталь) системы, то, хотя это может показаться странным, неопределенность первой системы больше, чем третьей. Это связано с вероятностями возможных состояний системы. Для третьей системы почти наверняка можно предсказать, что изготовленная деталь окажется годной. Напрашивается второй вывод: неопределенность системы зависит от вероятностей возможных состояний системы.

Теперь остается лишь подобрать такую формулу, которая учитывала бы оба параметра системы. Это и сделал Шеннон. Он ввел в рассмотрение понятие энтропии как меры неопределенности.

Энтропией системы A называется величина

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i.$$

В качестве основания логарифма удобнее всего принять число 2. Например, энтропия системы X в примере 1 равна

$$H(X) = - \left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Бит или не бит? В физике после рассмотрения какой-либо физической величины сразу же возникает необходимость выбора единицы измерения этой величины. Ученые разработали много различных способов, которые по-

зволяют ввести единицу измерения физической величины. Но, как ни странно, наиболее приемлемым способом оказался тот, который, вообще говоря, трудно назвать научным — это определение единиц измерения путем соглашения между учеными. Именно так были введены всем известные единицы измерения длины (метр) и массы (килограмм).

Как только Шеннон приступил к рассмотрению энтропии системы, перед ним встала проблема: а в каких единицах ее измерять? Выбрать единицу измерения для энтропии оказалось намного труднее, чем для физических величин. В самом деле, в чем можно измерять энтропию такой системы, как действующее промышленное предприятие?

Тем не менее энтропия системы, как и количество информации, заключенное в некотором сообщении, вполне поддается количественному измерению. Представьте, что вы слушаете лектора, который читает лекцию в прямом смысле, т. е. не отрываясь от написанного текста. Понятно, что если лектор прочитает 10 страниц, то он может сообщить слушателям количество информации, примерно в 10 раз большее по сравнению с тем, которое он мог бы сообщить, прочитав всего лишь одну страницу.

Таким образом, в первом приближении одна страница машинописного текста может быть принята в качестве единицы измерения количества информации, сообщаемого слушателям лектором. Правда, такая единица измерения передаваемой информации является весьма условной, так как разные лекторы могут вместить на одной странице различное количество материала, да и по своему значению изложенные мысли могут быть неравнозначны.

Тем не менее при выборе единицы измерения энтропии был использован примерно такой же подход, который мы рассмотрели в случае с лектором. Шеннон предложил в качестве единицы измерения энтропии принять энтропию, заключенную в системе, которая может находиться в двух возможных состояниях с равными вероятностями. Ученые всего мира пришли к соглашению использовать эту единицу в качестве основной. Эта единица измерения получила название «бит», что означает «двоичный знак».

Интересно теперь рассмотреть на практическом при-

мере использование нововведенной единицы измерения. Возьмите в руки любую книгу или раскройте книгу, которую вы сейчас читаете, на любой странице. Выберите какое-нибудь слово, прикройте его так, чтобы прочитать можно было только его часть, а затем предложите одному из своих друзей угадать, какая первая буква закрыта.

Понятно, что при угадывании имеется некоторая неопределенность или, как мы называем, энтропия системы. Покажем, как с помощью понятия бита можно количественно измерить эту энтропию. В русском языке 32 буквенных знака, значит, вообще говоря, возможны 32 различных исхода. Нетрудно подсчитать, что вероятности этих исходов равны между собой, т. е. $p_i = 1/32$. Таким образом, энтропия одной буквы $H(B)$ будет равна

$$H(B) = - \sum_{i=1}^{32} \frac{1}{32} \log_2 32 = 5 \text{ битов.}$$

На самом деле рассматриваемая неопределенность будет меньше 5 битов, так как некоторые буквы легко можно угадать по смыслу.

Количество энтропии равно числу ответов «да» или «нет», необходимых для снятия неопределенности системы. Каждый ответ равен 1 биту. Так, в примере с подбрасыванием монеты требуется дать всего один ответ — «да» или «нет». Можно считать, что количество информации, содержащееся в сообщении, измеряется уменьшением энтропии системы под действием этого сообщения. Например, количество информации, заключенное в сообщении о том, на какое поле шахматной доски пошел конь, равно 3 битам.

Рассмотрим этот пример подробнее. Предположим, что шахматист взял в руки шахматного коня и хочет поставить его на одно из 8 полей шахматной доски. Возможно всего 8 исходов, или, другими словами, 8 состояний, для шахматного коня. В этом случае можно вычислить энтропию системы:

$$H_1(X) = - 8 \cdot \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} = 3 \text{ бита.}$$

После того как будет получено сообщение о том, на какое поле пошел конь, неопределенность системы полностью снимется, и ее энтропия станет равной $H_2(X) = 0$.

Количество информации, содержащееся в сообщении о том, на какое поле пошел конь, будет равно разности между первоначальной энтропией и энтропией системы после получения сообщения:

$$J_X = H_1(X) - H_2(X) = 3 - 0 = 3 \text{ бита.}$$

Рассмотренные выше вопросы относятся к так называемой статистической теории информации. Но все множество жизненных ситуаций не укладывается в рамки шенноновской теории. Основным недостатком ее является то, что она не позволяет учитывать смысловое содержание систем и сообщений. Например, монета (выпадающая на «орла» или «решку») и самолет (свой или неприятельский) с точки зрения этой теории — равнозначные системы. Тем более, как оценить количество информации, содержащейся в записке с таким содержанием: «Наташа, я люблю тебя! Вася».

Наука пытается найти решение и для столь сложных вопросов. В последнее время получила развитие семантическая теория информации, основы которой заложены в трудах советских ученых. Семантическая теория информации позволяет оценить смысловое содержание сообщения, что очень важно. Возможно, в недалеком будущем благодаря семантической теории информации можно будет оценить количество информации, содержащейся и в годовом отчете предприятия, и в рационализаторском предложении рабочего, и в научном докладе, и в донесении разведчика.

НОВАЯ ВЕТВЬ

Динамическая теория. До сих пор мы рассматривали случайные величины при некотором фиксированном моменте времени, т. е. такие величины, которые не изменяются во времени. Так, если взять партию водопроводных труб одного диаметра, например 30 мм, то можно утверждать, что диаметры этих труб будут, во-первых, случайными величинами и, во-вторых, неизменяемыми во времени.

Выясним, почему. Если вы измерите какое-то количество труб, то заметите, что размер диаметра у них, стро-

го говоря, разный... У одних он будет равен 29,5 мм, у других — 30,5 мм и т. д., т. е. он будет изменяться в каких-то пределах и для каждой трубы являться совершенно случайным. С другой стороны, этот случайный размер будет для данной трубы постоянным и не изменяемым во времени. (Если не принимать во внимание явление коррозии).

В принципе любой размер детали, изготовленной механической обработкой, является случайной величиной, так как он колеблется в некоторых пределах, или, говоря на инженерном языке, в определенном поле допуска. Случайной величиной также будет число очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

Однако на практике чаще приходится иметь дело с такими случайными величинами, которые зависят от времени. Например, скорость движения автомобиля является случайной величиной, изменяемой во времени, так как на нее влияют состояние дороги, интенсивность движения, наличие пешеходов, перекрестков, спуски, подъемы, повороты и т. д. Сила, действующая на режущую кромку лемеха плуга, также является случайной величиной. Ее изменение во времени определяется и глубиной вспашки, и сопротивлением почвы, и силой тяги трактора и т. д.

Классические примеры таких величин встречаются и в физике. Так, например, координаты материальной точки, совершающей броуновское движение, являются случайными величинами, зависящими от времени. Любопытно, что немецкий физик Эйнштейн (1879—1955) и польский физик Смолуховский (1872—1917) еще в начале нашего столетия применили вероятностные методы

для исследования случайных величин такого рода. Разработанная ими вероятностная теория броуновского движения не утратила своего значения и для физики наших дней.

Случайная величина, изменяющаяся во времени, называется *вероятностным процессом*. Обозначают вероятностные процессы следующим образом: $X(t)$,



$\xi(t)$, $F(t)$ и т. д., где t , является параметром, выражающим время.

Наука, изучающая вероятностные процессы, называется *теорией вероятностных процессов*. Следует отметить, что эта наука является сравнительно новой ветвью теории вероятностей, поэтому многие понятия в ней еще не получили общепринятых определений. Так, например, наряду с термином

«вероятностный процесс» в современной математической литературе используются термины «случайный процесс», «стохастический процесс», «случайная функция» и др. Все эти термины по своему смыслу адекватны.

Соотношение между случайными величинами и вероятностными процессами можно пояснить так: случайная величина является как бы мгновенным срезом вероятностного процесса, зафиксированным в данный момент времени. К этому можно добавить: если случайная величина рассматривается в статике, то вероятностный процесс — в динамике. Образно говоря, теория вероятностных процессов является динамической теорией вероятностей.

Математическое ожидание и дисперсия вероятностного процесса. Одним из примеров вероятностного процесса является температура металла в мартеновской печи в период плавки. Обозначим эту температуру $X(t)$ и представим этот вероятностный процесс графически.

По оси абсцисс (рис. 7) откладываем время t , а по оси ординат — значения температуры X . Тогда изменение температуры в течение всей плавки изобразится в виде некоторой линии. Эта линия называется *реализацией вероятностного процесса*. В силу случайного характера температуры могли бы иметь место другие реализации, и соответственно другие линии на нашем графике. Таким образом, вероятностный процесс графически представляется в виде совокупности кривых линий.

Если теперь провести на графике сечение, отвечающее моменту t_1 , параллельное оси ординат, то значения,

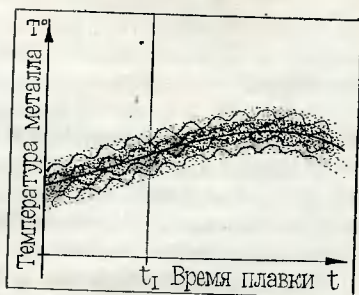


Рис. 7. Изменение температуры плавки от времени.

соответствующие пересечениям вертикальной прямой с кривыми линиями, будут являться значениями случайной величины. Вычислим математическое ожидание для этой случайной величины и нанесем его на график. Подобным образом вычислим математические ожидания в других точках и также нанесем на график. Затем соединим точки, отвечающие математическим ожиданиям, плавной кривой линией. Полученная новая кривая будет геометрически изображать математическое ожидание случайного процесса.

Аналогичным образом в каждый момент времени может быть вычислена дисперсия. Совокупность всех вычисленных значений дисперсии образует *дисперсию вероятностного процесса*.

16 Подобно тому, как числовые характеристики случайных величин дают возможность отразить основные закономерности случайных величин, математическое ожидание и дисперсия вероятностного процесса позволяют сквозь кажущуюся случайность выявить наиболее характерные закономерности вероятностных процессов. Интересно, что исследование, послужившее началом кибернетики, было связано именно с таким анализом этих процессов.

— **Автокорреляционная и взаимокорреляционная функции вероятностного процесса.** Рассмотренные характеристики вероятностного процесса: математическое ожидание и дисперсия аналогичны математическому ожиданию и дисперсии случайной величины. Однако для вероятностных процессов вводится еще одна характеристика, которой не могло быть при рассмотрении случайных величин. Она называется *корреляционной функцией* вероятностного процесса.

17 Прежде чем дать строгое математическое определение корреляционной функции вероятностного процесса, выясним прикладное содержание этого математического понятия. Рассмотрим некоторый вероятностный процесс $X(t)$. Как уже отмечалось, его можно интерпретировать как некоторую случайную величину X , изменяющуюся во времени.

— Для определенности будем подразумевать под $X(t)$ некоторый реальный вероятностный процесс, например, угол пикирования самолета. Если рассматривать этот случайный процесс в два различных фиксированных момента времени t' и t'' , то вероятностный процесс в эти

моменты будет представлять собой не что иное, как две различные случайные величины.

На практике всегда возникает вопрос о взаимосвязи между значениями вероятностного процесса в различные моменты времени. Так, например, если самолет в момент времени t' имел угол пикирования α , то интересует связь угла α с углом пикирования β в момент времени t'' . Не может быть и речи о том, чтобы искать между этими двумя углами строгую функциональную связь (так как угол пикирования в момент времени t' не определяет угла пикирования в момент t''), но неправильно было бы также утверждать, что всякая связь между этими углами вообще отсутствует. Оказывается, эта связь имеется, но она носит среднестатистический характер и, следовательно, может быть оценена так, как оценивается связь между двумя случайными величинами, т. е. при помощи коэффициента корреляции. (Формулу коэффициента корреляции см. на стр. 89).

Заставим t' и t'' принимать все возможные значения параметра t . Параметр t представляется как бы в виде двух переменных t' и t'' , которые изменяются независимо друг от друга. Если теперь вычислять коэффициент корреляции для всех парных комбинаций значений t' и t'' , то полученная совокупность коэффициента корреляции будет отражать степень взаимосвязи между случайными величинами, порожденными вероятностным процессом в любые моменты времени.

Для оценки взаимосвязи между углами пикирования в моменты времени t' и t'' можно вычислять также коэффициенты ковариации (см. стр. 89) для всех парных комбинаций значений t' и t'' . В этом случае полученная совокупность коэффициентов ковариации также будет отражать степень взаимосвязи между случайными величинами, порожденными вероятностным процессом в любые моменты времени.

Таким образом, мы подошли к понятию корреляционной функции, которая определяется следующей формулой:

$$K_X(t', t'') = M[(X(t') - MX(t')) \cdot (X(t'') - MX(t''))],$$

где $MX(t)$ — математическое ожидание вероятностного процесса.

Чаще функция $K_X(t', t'')$ называется автокорреляци-

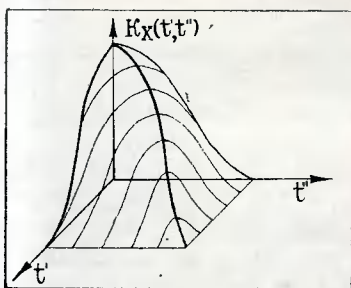


Рис. 8. Геометрическое изображение автокорреляционной функции случайного процесса.

онной функцией вероятностного процесса, так как она определяется для одного вероятностного процесса. Дадим геометрическую интерпретацию автокорреляционной функции вероятностного процесса. Автокорреляционная функция зависит от двух переменных t' и t'' , и, следовательно, ее можно представить в трехмерной прямоугольной системе координат как функцию

от этих переменных. Известно, что такая функция определяет в пространстве некоторую поверхность (рис. 8).

Иногда приходится рассматривать взаимосвязь между двумя различными вероятностными процессами. Например, $X(t)$ может обозначать угол пикирования одного самолета, а $Y(t)$ — угол пикирования другого самолета, летящего в паре с первым. Если самолеты заходят на цель поодиночке, то, естественно, их углы пикирования не зависят друг от друга, и случайные процессы $X(t)$, $Y(t)$ некоррелированы между собой. Если маневр выполняется самолетами совместно, причем один из них является ведущим, а другой ведомым, то очевидно, что имеется взаимозависимость между их углами пикирования, и тогда случайные процессы коррелированы. В этом случае появляется возможность оценить степень взаимозависимости (взаимосвязи), между углами пикирования, т. е. между вероятностными процессами $X(t)$ и $Y(t)$. Степень взаимосвязи оценивается *взаимокорреляционной функцией*

$$K_{XY}(t) = M [(X(t) - MX(t)) \cdot (Y(t) - MY(t))].$$

Рассмотрим пример использования на практике взаимокорреляционных функций. Инженеры часто сталкиваются с явлением множественного ветвления трещин при хрупком разрушении металла. Каждая трещина представляет собой не что иное, как вероятностный процесс. Естественно, возникает вопрос: имеется ли какая-нибудь связь между распространением двух соседних трещин, или каждая трещина движется независимо от

других? Ответ легко можно получить, если исследовать взаимнокорреляционную функцию для двух соседних трещин. Методы вычисления таких функций подробно описаны в математической литературе.

Любопытно, что при изучении взаимнокорреляционных функций близлежащих трещин оказалось, что в начальной стадии трещины не коррелируют между собой, т. е. развиваются независимо друг от друга. Однако с развитием трещин зависимость между ними возрастает, что приводит к возрастанию значений взаимнокорреляционной функции. Это позволяет использовать полученные результаты для разработки методов борьбы с трещинами.

В рассмотренном нами примере с углом пикирования самолета изучение автокорреляционной функции помогает разработать оптимальные режимы ведения воздушного боя.

Как видите, метод корреляционных функций находит широкое применение в различных областях науки и техники. Большое распространение он получил в теории автоматического регулирования, радиотехнике, военном деле и в космонавтике.

Пример использования корреляционных функций. Даже весьма беглое ознакомление с понятием корреляционной функции позволяет убедиться в том, что оно не только сложно в математическом отношении, но весьма неудобно для практических применений при ручном счете. Дело в том, что корреляционная функция характеризует определенные стороны поведения многих случайных величин, да еще таких, которые изменяются во времени. Поэтому естественно, что для статистического определения корреляционной функции по эмпирическим данным требуется большое количество опытных измерений и довольно громоздкая процедура обработки их результатов.

На практике выход был найден благодаря использованию специальных приборов, так называемых корреляторов (или коррелометров), которые позволяют автоматически вычислять корреляционные функции вероятностных процессов. Правда, использование этих приборов возможно там, где данные о вероятностном процессе также могут быть получены автоматически, например с помощью осциллографа. Благодаря этому аппарат корреляционных функций нашел широкое применение в тео-

рии автоматического регулирования. К сожалению, в других областях, особенно при управлении производственными процессами, носящими дискретный характер, метод корреляционных функций применяется еще не часто.

В связи с этим представляет большой интерес использование метода корреляционных функций для расчета потребности производства в материалах.

Пример. Требуется определить потребность предприятия в каком-то материале для обеспечения производственной программы. Полная потребность в данном виде материала обычно вычисляется по такой формуле:

$$V = \Pi - q(O) + q(T),$$

где V — полная потребность;

Π — потребность, обеспечивающая производственную программу;

$q(O)$ — остаток к началу планируемого периода;

$q(T)$ — остаток к концу планируемого периода.

Эта формула применима в тех случаях, когда производство не подвержено воздействию случайных факторов или это воздействие пренебрежимо мало. К сожалению, на практике почти всегда влияние случайных факторов велико и пренебрегать ими без ущерба для производства не удастся. И тот материал, который будет израсходован в течение планируемого периода, и материал, который поступит от поставщика, и остаток к концу планируемого периода — не могут быть заранее точно определены. Следовательно, они являются случайными величинами, а если их рассматривать во времени, то это вероятностные процессы.

Именно использование теории вероятностных процессов позволяет более полно отразить характер изменения рассматриваемых случайных величин. Пусть поступление материала в течение t -го дня описывается стационарной (в смысле корреляционной теории), т. е. однородно ведущей себя во времени последовательностью $r(t)$ с математическим ожиданием m_r и корреляционной (точнее, автокорреляционной) функцией $K_r(t)$. Пусть расход материалов в течение t -го дня описывается стационарной случайной последовательностью $S(t)$ с математическим ожиданием m_s и корреляционной функцией $K_s(t)$. Тогда для величины остатка к концу t -го дня справедливо равенство

$$q(t) = q(0) + \sum_{\tau=1}^t [r(\tau) - S(\tau)],$$

где τ — количество рабочих дней.

Используя такой подход, П. А. Ватник решает с помощью метода корреляционных функций следующую производственную задачу. Требуется определить задание поставщику на год (300 рабочих дней), покрывающее потребление материала с вероятностью не ниже 0,9, если величина остатка $q(0)$ к началу года равна 1000, а плановая потребность P на обеспечение производственной программы равна 9675.

Искомое задание программы получается равным 9059.

Ветвящиеся процессы. Специалистам по физике металлов, занимающимся изучением хрупкого разрушения, приходится анализировать процесс распространения энергии движущейся трещины в металле. Этот вопрос подробно рассматривается во многих трудах по вероятностной теории хрупкости, а мы лишь схематично изложим физическую модель явления. Структурные блоки металла можно представить в первом приближении сферическими.

В момент, когда фронт трещины достигает блоков a и b , энергия передается нескольким соседним блокам, а от них следующим, расположенным вблизи блока и т. д. Число блоков, вовлекаемых в процесс разрушения, в каждый момент времени является случайным, следовательно, мы имеем дело с вероятностным процессом. Вероятностные процессы такого типа получили название *ветвящихся процессов*. Теория ветвящихся процессов в последние годы нашла применение при изучении многих реальных явлений и в настоящее время продолжает разрабатываться.

В общем виде ветвящийся процесс можно представить следующим образом. Предположим, что имеется некоторая совокупность частиц, каждая из которых с течением времени превращается в частицы того же типа. Этот процесс «размножения» происходит таким образом, что из исходных частиц через время t с вероятностью $p_k(t)$ порождается группа из k частиц. Если обозначить через $\xi(t)$ число частиц, «родившихся» к моменту времени t , то $\xi(t)$ будет ветвящимся процессом. Пусть в некоторый исходный момент времени s , скажем, $s=0$, имеется

ровно k частиц. Обозначим $\xi_i(t)$ число частиц, порожденных i -й частицей ($i=1, \dots, k$) через время t . Тогда общее число частиц через время t будет равно

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_k(t).$$

Таким образом, построена модель ветвящегося процесса, с помощью которой можно вычислять различные характеристики этих процессов, представляющие интерес для практики. Наиболее часто инженеров интересуют две вероятности: 1) вероятность вырождения ветвящегося процесса $\xi(t)$, т. е. вероятность того, что к некоторому моменту времени «умрут» все ранее имевшиеся частицы, и 2) вероятность того, что к некоторому моменту времени образуется бесконечно много частиц (явление взрыва).

Ветвящиеся случайные процессы являются одним из важнейших классов марковских процессов. Начало их глубокого изучения было положено в работе А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева, вышедшей в 1947 г. Эти процессы служат математической моделью многих реальных физических, биологических, технических систем, состоящих из элементов, способных превращаться из одного вида в другой и даже совсем исчезать. Важные результаты в теории ветвящихся процессов получили также В. А. Севастьянов, В. М. Золотарев, В. П. Чистяков и другие.

Пэры и наследники. В середине прошлого века некоторых англичан вдруг стало беспокоить постепенное исчезновение многих... именитых фамилий. Увы, в частности, стали вырождаться английские пэры. Королева Англии Елизавета сразу же усмотрела в этом серьезную угрозу для страны и немедленно обратилась за помощью к... математикам.

Английский естествоиспытатель Ф. Гальтон (1822—1911) взялся с помощью теории вероятностей решить загадку исчезновения пэров. Но ему удалось только сформулировать ее. (Вероятность вырождения мужской линии для n фамилий составляет p_1, p_2, \dots, p_n . Вычислить вероятность, в каком поколении наступит полное вымирание той или иной фамилии). Задача успешно была решена учеником Гальтона Ватсоном, поэтому и получила название схемы Гальтона—Ватсона.

Эта схема послужила толчком для развития одного из наиболее важных направлений теории вероятностей—

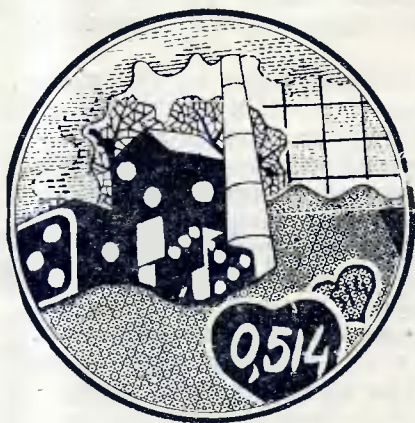
теории ветвящихся процессов. В дальнейшем при помощи теории ветвящихся процессов было решено много практических задач в теории горения, при изучении радиоактивного распада и др.

И только проблема вырождения пэров не укладывалась в рамки схемы Гальтона—Ватсона и оставалась загадкой. Тогда в 1891 г. Гальтон сам занялся исследованием этого вопроса. И вскоре он разрешил загадку. Но, к сожалению, теория вероятностей не имеет к этому решению никакого отношения. Была обнаружена тенденция пэров жениться на девушках, которые не имели братьев, и поэтому наследовали богатство семьи. И Гальтон решил, что, приходя из семьи, в которой нет сыновей, девушка обладала соответственной наследственностью, т. е. у нее, как правило, рождались дочери и некому было продолжить именитый род. Так, по его мнению, пристрастие пэров к богатству обернулось против них.

* * *

Итак, вы ознакомились с математическим аппаратом теории вероятностей. Уже в этой главе читатель мог убедиться в широком применении вероятностных методов в самых различных областях науки и техники. И если у вас хватило терпения дочитать книгу до этого места, то авторы заверяют, что более полно о прикладном значении этой теории и ее многочисленных методов они рассказывают дальше и что самое интересное впереди.





ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ПРАКТИКА

РЕЦЕПТЫ КАЧЕСТВА

Начиная с 40-х годов роль прикладной математики стала быстро возрастать. О том, какое большое значение придавалось прикладным математическим методам в то время, можно судить по такому факту. В США в годы второй мировой войны некоторые статистические методы были засекречены. В то же время такой важный способ интенсификации производства стали, как использование кислорода, засекречен не был. В наши дни, когда наука стала непосредственной производительной силой, эффективность этих методов возросла еще больше. Их возможности безграничны. Рассмотрим некоторые из них.



— Нормальный закон распределения вероятностей. В последние годы большое распространение в торговле получил метод изучения спроса покупателей. Статистика помогает заранее определить потребность населения в тех или иных видах товаров и

даже потребность в размерах одежды. Предположим, что нам нужно узнать, каков спрос населения на мужские костюмы различных размеров. Нетрудно заметить, что желающих приобрести костюмы 60 размера очень мало, немного больше желающих иметь костюмы 58 размера. Если рассматривать этот процесс по мере убывания размеров, то спрос возрастает и становится максимальным на уровне 50 размера. Затем спрос уменьшается и становится весьма незначительным на уровне 46 размера.

Мы рассмотрели изменение одной случайной величины. Можно было бы привести еще много примеров из самых различных областей. Интересно, что, несмотря на различие этих величин, графики, характеризующие их изменения, будут подобны. Таким образом, наблюдаемый закон изменения случайных величин является в какой-то степени универсальным.

Открытие рассматриваемого закона (впоследствии А. Пуанкаре назвал его нормальным законом распределения вероятностей) связано с именами трех ученых, которые открыли его почти одновременно: малоизвестный математик из Америки Р. Эдрейн (1775—1843) опубликовал свои результаты в 1808 г., великий немецкий математик Ф. Гаусс (1777—1855) сделал свое открытие годом позже и знаменитый французский математик П. Лаплас изложил свои исследования в книге «Аналитическая теория вероятностей» в 1812 г. Хотя Эдрейн стоит первым в этом списке, его работа в дальнейшем не получила такой известности, как труды Гаусса и Лапласа, поэтому нормальное распределение вероятностей называется распределением Гаусса—Лапласа.

Так как случайные величины, имеющие нормальный закон распределения вероятностей, наиболее часто встречаются на практике, то их изучению уделяли большое внимание многие выдающиеся ученые. Английский естествоиспытатель Ф. Гальтон построил любопытный демонстрационный прибор, который был назван «доска Гальтона».

Устроен он следующим образом. В нижней части наклонной доски Гальтон прибил ряд вертикальных планок на одинаковом расстоянии друг от друга, вверху он построил воронку, а в середине (ниже воронки) набил гвозди, беспорядочно расположив их. Купив в соседней лавке несколько фунтов дроби, Гальтон высыпал ее че-

рез воронку. Ударяясь о гвозди, дробинки скапливались в нижней части доски между параллельными планками.

Линия, проведенная по верхнему краю скопившихся внизу доски дробинок, имела форму, в точности отвечающую нормальному закону распределения вероятностей. В настоящее время при изучении теории вероятностей «доска Гальтона» используется для демонстрации нормального закона распределения вероятностей.

Много времени изучению нормального закона уделил великий немецкий математик Гаусс. Кривую, отвечающую нормальному закону, которую он сравнивал с колоколом, называют также «колоколом Гаусса».

Кроме того, Гаусс и русский академик А. М. Ляпунов вывели уравнение нормального закона распределения вероятностей:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Здесь a — математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения вероятностей;

σ — среднее квадратическое отклонение этой случайной величины;

e , π — известные математические константы.

Как видим, уравнение кривой закона нормального распределения, а следовательно, и ее график зависят от двух параметров — математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ . Математическое ожидание указывает место расположения вершины колокола на графике (по оси абсцисс). Среднее квадратическое отклонение определяет форму колокола. Чем больше σ , тем колокол более пологий.

Правило трех сигм. В предыдущем разделе было рассказано о законе нормального распределения вероятностей и его графическом изображении. Рассмотрим теперь площадь, заключенную между осью абсцисс и кривой, отвечающей нормальному закону распределения вероятностей. С помощью методов интегрального исчисления можно вычислить эту площадь. Оказывается, что она равна единице. Таким же образом можно вычислять и отдельные участки этой площади. Если от точки, отвечающей значению a , в обе стороны оси абсцисс отложить значения, равные $\pm\sigma$, и в точках $a-\sigma$, $a+\sigma$ восстановить два перпендикуляра, то образуется фигура, заключен-

ная между этими перпендикулярами (с боков), осью абсцисс (снизу) и кривой (сверху). На рис. 9 эта фигура представлена. Ее площадь составляет 68,26% от всей рассматриваемой площади. Математики говорят, что в интервале $[a-\sigma, a+\sigma]$ заключено 68,26% всей площади, в интервале $[a-2\sigma, a+2\sigma]$ — 95,44%, а в интервале $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ заключено 99,73% всей площади.

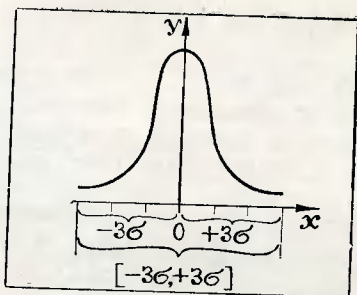


Рис. 9. Правило трех сигм.

Последнее означает, что с вероятностью 99,73% все значения случайной величины находятся в интервале $[a-3\sigma, a+3\sigma]$, т. е. если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то с практической достоверностью можно считать, что все значения этой случайной величины расположены в интервале $\pm 3\sigma$. Это и есть правило трех сигм. Оно находит применение при рассмотрении практических вопросов.

Пример. Каждому экспериментатору, занимающемуся измерениями тех или иных величин, хорошо известна ситуация, когда в результате эксперимента наряду с близкими друг другу значениями появляется существенно отличающееся, так называемое «дикое значение». Экспериментатору нужно решить: действительно ли это значение не характеризует измеряемый параметр и его следует отбросить, т. е. исключить из рассмотрения, или оно все-таки отражает характер параметра и его отбрасывание неправомерно. В этой ситуации задача может быть решена с помощью правила трех сигм.

По полученным значениям вычисляется среднее значение, среднее квадратическое отклонение и строится интервал $[a-3\sigma, a+3\sigma]$. Если значение, вызывающее сомнение, лежит в пределах этого интервала, то его следует включить в дальнейшую статистическую обработку. Если же оно лежит за пределами интервала, тогда его нужно признать «диким» и исключить из рассмотрения.

Например, при разработке норматива времени, необходимого для изготовления одной детали, в результате хронометрических наблюдений в лаборатории НОТ бы-

ли получены следующие значения: 5,0; 4,8; 5,2; 5,3; 5,0; 6,1 (время в минутах). Рассмотрение приведенных данных показывает, что последнее число 6,1 сильно отличается от остальных. Возникает вопрос: не является ли это значение «диким», т. е. не скрыта ли ошибка в самом наблюдении? Для ответа на этот вопрос используем правило трех сигм: вычисляем среднее значение — 5,23, среднее квадратическое отклонение — 0,46 и трехсигмовый интервал — [4,85—6,61]. Как видим, значение 6,1 не выходит за пределы этого интервала. Следовательно, его нельзя считать «диким».

Вероятностный контроль качества. Повышение качества выпускаемой продукции — первостепенная задача любого производства. Для решения этой задачи необходимо использовать все возможные резервы. Наряду с другими методами в последнее время одним из важнейших рычагов повышения качества продукции стал вероятностно-статистический контроль. Наибольшее распространение в производстве получили контрольные диаграммы. Рассмотрим, как ими пользуются.

В инструментальном цехе на токарном станке изготавливают однотипные детали. Предположим, что это втулки с заданным номинальным внешним диаметром 50 мм. Понятно, что в силу различных причин станочнику не удастся строго выдерживать этот диаметр. Должен ли контролер ОТК при проверке деталей браковать их при обнаружении некоторых отклонений?

Мы уже знаем, что если отклонения будут лежать в пределах интервала трех сигм, то изготовленную деталь следует считать годной, в противном случае деталь бракуется. Результаты такого контроля легко изобразить графически в виде контрольной диаграммы, которая обычно вывешивается в цехе на видном месте. Это позволяет следить за изменением качества деталей не только контролеру ОТК, но и самим рабочим, которые изготавливают их.

Контрольная диаграмма (рис. 10) представляет собой несколько параллельных линий, построенных в определенной системе координат. Средняя линия проведена на уровне номинального значения, контролируемого параметра. В нашем примере эта линия соответствует значению 50 мм. В обе стороны от средней линии параллельно ей на расстоянии трех сигм проведены еще две прямые. После измерения каждой детали контролер

ОТК наносит фактическое значение измеренного параметра на контрольную диаграмму. На основании статистических данных контроля деталей было вычислено среднее статистическое отклонение $\sigma = 0,5$ мм. Следовательно, две контрольные линии будут соответствовать значениям 48,5 и 51,5 мм.

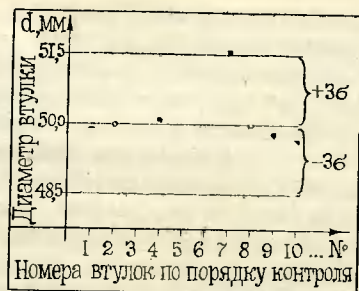


Рис. 10. Контрольная диаграмма.

Если точки, соответствующие фактическим значениям наблюдаемого параметра, разместятся близко к средней линии (по ту или другую сторону), то технологический процесс следует считать стабильным и качество получаемой продукции высоким. Если же точки окажутся ближе к контрольным линиям, оставаясь в пределах трехсигмового интервала, то это будет указывать на разладку технологического процесса и потребует от станочника выяснения причин и их устранения. Если же точки выйдут за пределами контрольных линий, то соответствующие детали бракуются, а станок останавливается для переналадки.

Как видите, контрольные диаграммы довольно просты. Но в то же время их введение на производстве делает контроль качества более эффективным, а результаты контроля более наглядными.

Оптимальный объем выборки. В исследовательской работе часто приходится давать оценку параметров большой совокупности (которая называется генеральной) по небольшому числу выбранных случайным образом элементов (так называемой выборке). Математическая теория выборочного метода позволяет извлекать максимальную информацию из минимального числа статистических данных.

Например, при определении норм контроля механических свойств стали не существует научно обоснованного подхода. Чаще всего нормы устанавливаются на основании эмпирических соображений. В то же время использование статистической теории выборки позволяет науч-

но разработать эти (и многие другие) нормы текущего производственного контроля.

Сплошной контроль продукции в производстве, например, в прокатном цехе металлургического завода связан с большими производственными затратами, с разрушением какой-то части готовой продукции. В связи с этим, как правило, производят выборочный контроль. Теория выборочного метода позволяет сделать этот контроль наиболее эффективным.

Многие специалисты, «по долгу службы» занимающиеся обработкой статистических данных, но недостаточно глубоко знакомые с тайнами «статистического ремесла», часто убеждены в том, что вероятностно-статистические формулы целесообразно использовать только там, где имеются очень большие массивы данных, а там, где количество обрабатываемых данных невелико, можно ограничиться элементарными широко известными приемами.

Такое мнение ошибочно. Именно там, где выборка невелика, необходимо использовать наиболее тонкие математико-статистические методы, чтобы из минимального количества выборочных данных извлечь максимальную информацию о генеральной совокупности. Разработкой этих вопросов и занимается теория малой выборки, которая является одним из наиболее актуальных направлений теории выборочного метода.

Каким должен быть оптимальный объем выборки? Это основной вопрос, который приходится решать при практическом использовании выборочного метода. Особенно остро он стоит при контроле качества продукции в производственных условиях. Выше уже отмечалось, что сплошной контроль продукции в производстве, как правило, неприемлем. Чем меньше выборка, тем контроль удобнее, но, с другой стороны, при очень малой выборке контроль не будет достаточно надежным. Естественно, возникает необходимость установления оптимального способа контроля, который обеспечивал бы практически приемлемую надежность при наименьших затратах. Понятно, что для того, чтобы грамотно назначить объем выборки, нужно знать, какие факторы его определяют.

На численность выборки влияют главным образом три фактора:

1) степень колеблемости σ^2 изучаемого признака, ко-

торая характеризуется дисперсией. Чем больше колеблемость, тем больше должна быть численность выборки;

2) величина допустимой ошибки Δ случайной выборки. Чем меньше величина допустимой ошибки, тем большей должна быть численность выборки, чтобы обеспечить требуемую высокую точность оценки;

3) уровень вероятности t , с которой требуется гарантировать результаты выборки. Чем выше будет выбран уровень вероятности, тем больше должна быть численность выборки.

Порядок использования выборочного метода рассмотрим на примере контроля механических свойств стали 17ГС. Здесь выборочный метод позволяет решить две задачи:

а) оценить надежность существующих методов контроля;

б) определить число испытаний, которое обеспечило бы необходимую надежность оценки параметров генеральной совокупности (т. е. всего поставляемого металла данной партии).

А. Для оценки надежности существующего метода контроля ударной вязкости стали от каждой партии стали 17ГС испытываются шесть образцов (по три образца от двух листов).

Известно следующее равенство:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Обозначим $\sigma_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}}$, тогда среднее квадратическое отклонение малой выборки можно вычислить по формуле

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } \sigma_x \text{ — среднее квадратическое отклонение}$$

генеральной совокупности, n — численность выборки.

По данным, полученным на Орско-Халиловском металлургическом комбинате, принимаем $\sigma_x = 1 \text{ кГм/см}^2$, $n = 6$ образцов, тогда

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2,45} = 0,4 \text{ кГм/см}^2.$$

Допустимая ошибка определяется по формуле $\Delta = t \cdot \mu$

Уровень вероятности t берется из специальных таб-

лиц в зависимости от численности выборки и требуемой надежности. Например, при $n=6$ и надежности 95% $t=2,57$, в этом случае $\Delta=2,57 \cdot 0,4=1,03$ кГм/см²; при $n=6$ и надежности 99% $t=4,03$, $\Delta=4,03 \cdot 0,4=1,61$ кГм/см².

Следовательно, при существующем методе контроля ударной вязкости с надежностью 95% можно утверждать, что выборочная средняя арифметическая отклонится от общей средней арифметической не более чем на 1,03 кГм/см², а с надежностью 99% можно утверждать, что выборочная средняя отклонится не более чем на 1,61 кГм/см².

Б. Для определения числа испытаний при заданной надежности можно использовать формулу $\Delta=t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Эта

формула получается из равенства $\mu_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, если подста-

вить $\mu_x = \frac{\Delta}{t}$. Зная σ и задавшись величиной ошибки, можно найти n , соответствующее принятой надежности. Например, при заданной ошибке 0,5 кГм/см² и надежности 95% вычисляем, что нужно испытать 19 образцов. Следует отметить, что данная методика справедлива для случая, когда оценка качества металла производится по среднему значению контролируемого признака, а не по минимальному значению выборочных показателей.

Изложенная методика может быть использована при проведении исследовательских работ, например, при взвешивании слитков, при оценке точности различных методов химического и механического анализа и в других вопросах.

Говоря о широком использовании выборочного метода, нельзя не остановиться и на некоторых негативных сторонах его применения. Это касается весьма распространенного в ряде стран «зондажа общественного мнения». В угоду определенным кругам строго научный подход зачастую подменяется «научно обоснованной» спекуляцией. В этих случаях теория вероятностей становится всего лишь ширмой, под прикрытием которой совершаются сомнительные политические сделки. Как правило, в таких случаях прогнозы не подтверждаются жизнью и терпят скандальный провал. Так, например, в начале 70-х годов много шума вызвала история о том, как «специалисты по изучению общественного мнения» подвели

британскую партию консерваторов: они предсказали кандидатам этой партии успех на парламентских выборах. Правительство Хита, доверившись этим прогнозам, провело выборы за полтора года до окончания полномочий и... потерпело провал.

Известно немало аналогичных историй. Так, в конце 60-х годов проводящие «зондажи общественного мнения» канадские институты предсказывали неудачу либеральной партии Трюдо, а либералы одержали внушительную победу.

Чем же объяснить столь потрясающие провалы «зондажа общественного мнения»? Его нужно искать не в математических глубинах теории вероятностей, а в особенностях той «кухни», на которой рождаются политические прогнозы. Фабрикация «хороших» ответов, подтасовка статистических данных, политическая и экономическая зависимость от фирм, субсидирующих работу «по зондажу общественного мнения», — вот причины того, что в «научном методе» прогнозирования нет и грамма подлинной науки.

Удивительное свойство устойчивости. Многие статистические показатели окружающей нас реальной жизни обладают удивительным свойством устойчивости. Рассмотрим несколько примеров.

Число 0,514 хорошо известно в демографии. Как уже отмечалось, оно выражает долю мальчиков в общем числе новорожденных. Одним из первых ученых, который обратил внимание на эту закономерность, был немецкий естествоиспытатель А. Гумбольт (1769—1859). Он высказал предположение, что это явление можно рассматривать как общий закон для всего человечества. При этом Гумбольт установил, что это отношение равно 22/21.

Вслед за Гумбольтом подробно изучил эту проблему знаменитый французский математик П. Лаплас, но, обработав статистические данные, Лаплас получил совершенно другое значение. С 1745 г. в Париже в метрических книгах стали делать отметку о поле новорожденного. До конца 1784 г. в Париже окрестили 393 386 мальчиков и 377 555 девочек, т. е. 25/24.

Естественно, Лаплас попытался выяснить, почему это отношение отличается от отношения, полученного Гумбольтом. Он проделал огромную работу. Тщательно изучив метрические книги почти за 40 лет, Лаплас установил, что дети, отданные в приют, вписывались в эти кни-

ги дважды: при рождении и после того, как они попадали в приют. Причем крестьяне в приют отдавали больше девочек, чем мальчиков. Этой небольшой неточностью учета и объяснялось увеличение доли девочек в общем числе новорожденных.

Свойство устойчивости статистических показателей используется при вычислении так называемых таблиц смертности. Лаплас много внимания уделял и этому вопросу. Оказалось, что при постоянстве определенных условий жизни процент смертности по тем или иным причинам является довольно постоянной величиной.

Сколько в пруду рыбы? Рассмотрим еще один интересный пример применения теории вероятностей. В совхозе был сооружен большой пруд, в котором стали разводить зеркального карпа. Дело в хозяйстве шло хорошо, и вскоре перед работниками встал весьма прозаический вопрос — сколько в пруду рыбы? Как же планировать работу, если не известны точные результаты?

Директор совхоза собрал помощников и спросил: «Как будем рыбные богатства считать, товарищи?»

— Выход один, — ответил за всех бригадир, — спустить воду и потом сосчитать всю наличную рыбу. Правда, много карпа погибнет, но другого ничего не придумаешь.

— Придумывать ничего и не надо, — вмешался в разговор студент рыбного института, который проходил практику в совхозе и случайно оказался участником беседы. — Нам в институте рассказывали о таком способе.

Поступили так, как посоветовал студент. Сетью поймали 100 карпов, поставили на них метки и обратно пустили в пруд. Отдохнули немного рыбаки, а через несколько часов опять принялись за работу. За это время меченые карпы перемешались со всей рыбной братией, и когда рыбаки поймали снова 100 рыб, то среди них всего два карпа оказались мечеными.

— Расчет простой, — сказал студент, — 100 карпов представляют собой случайную выборку из общего числа рыб, находящихся в пруду. Это общее число называется генеральной совокупностью. Случайная выборка дает представление о генеральной совокупности. По нашей выборке мы можем считать, что на каждые 100 рыб в среднем приходятся 2 меченых карпа, а так как всего в пруду 100 меченых карпов, то можно составить элементарную пропорцию:

$$\frac{2}{100} = \frac{100}{x}, \text{ откуда } x = 5000,$$

т. е. в пруду примерно 5000 карпов.

Какой контроль лучше? При выборочном контроле качества продукции возникает много проблем, связанных с подбором наиболее эффективной схемы контроля. Эти вопросы до настоящего времени не получили научно обоснованного однозначного решения. Например, при контроле механических свойств котельных сталей предусмотрено испытание на ударную вязкость трех образцов от одного и того же листа партии, а при испытании углеродистых сталей — испытание двух образцов, причем по одному образцу от различных листов, при контроле же конструкционных сталей предусмотрено испытание трех образцов также по одному образцу от трех различных листов.

Аналогичные проблемы возникают во многих других случаях. Например, при контроле качества цемента важно решить, как лучше провести отбор проб: взять пять проб от одного замеса или по одной пробе от каждого из пяти замесов? Используя вероятностные соображения, можно дать ответ и на этот вопрос.

С помощью теории вероятностей был выполнен сравнительный анализ двух схем отбора образцов, применяемых при механических испытаниях стальных листов на ударную вязкость: по первой схеме брали три образца от одного листа, по второй — по одному образцу от трех листов.

Так как в обоих случаях берется по три образца, то может показаться, что обе схемы не отличаются друг от друга по своей трудоемкости. Однако первая схема менее трудоемкая, так как в этом случае все три образца берут от одного листа и, следовательно, требуется меньше усилий и затрат металла для их изготовления. Но, естественно, применение той или иной схемы определяется не столько степенью трудоемкости, сколько эффективностью обнаружения брака. Сначала покажем, как можно сравнить две схемы отбора образцов на примере стали 16ГН, а затем приведем общее решение задачи.

Введем ряд буквенных обозначений:

$\sigma_{пл}$ — односигмовая оценка разброса (т. е. колеблемости) значений ударной вязкости на плавке, проще говоря, среднее квадратическое значение удар-

ной вязкости на плавке. (Заметим, что, как правило, металл одной плавки идет как одна партия.);

$\sigma_{\bar{x}}$ — односигмовая оценка разброса средних значений ударной вязкости по листам, т. е. оценка колеблемости механических свойств между листами;

$\sigma_{\text{ост}}$ — односигмовая оценка разброса значений ударной вязкости вокруг средних значений ударной вязкости по листам, т. е. оценка внутрилистовой или остаточной колеблемости механических свойств;

$x_{\text{ист}}$ — истинное значение ударной вязкости на листе;

$X_{\text{ист}}$ — истинное значение ударной вязкости на партии.

Решение задачи состоит в построении трехсигмовых интервалов для истинного значения ударной вязкости на партии. Очевидно, что та схема отбора образцов будет более эффективной, при которой меньше окажется трехсигмовый интервал. При расчете необходимых оценок исходными являются данные, полученные путем статистической обработки результатов текущих статистических испытаний. Например, для стали 16ГН, выплавленной на Орско-Халиловском металлургическом комбинате, были получены следующие односигмовые оценки:

$\sigma_{\text{пл}} = 0,6 \text{ кГм/см}^2$; $\sigma_{\bar{x}} = 0,3 \text{ кГм/см}^2$; $\sigma_{\text{ост}} = 0,52 \text{ кГм/см}^2$.

По этим исходным данным вычислим необходимые трехсигмовые оценки.

С х е м а I. Берем три образца от одного листа. Если среднее квадратическое отклонение генеральной средней известно, то среднее квадратическое отклонение выборочной средней находится по формуле

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Для стали 16ГН:

$\sigma_{\text{ост}} = 0,52 \text{ кГм/см}^2$, тогда $\sigma_{x_{\text{ист}}} = 0,52/3 = 0,31 \text{ кГм/см}^2$;

$$3\sigma = 0,31 \cdot 3 = 0,93.$$

Теперь можем получить трехсигмовую оценку для истинного значения ударной вязкости металла данной партии:

$$X_{\text{ист}} = (x \pm 0,93) \pm 3 \cdot 0,3 = x \pm 1,83 \text{ кГм/см}^2.$$

С х е м а II. Берем по одному образцу от трех листов. Аналогичным образом получим:

$$\sigma_{x_{\text{ист}}} = \frac{0,52}{1} = 0,52 \text{ кГМ/см}^2, \quad 3\sigma = 0,52 \cdot 3 = 1,56 \text{ кГМ/см}^2,$$

$$x_{\text{ист}} = \pm 1,56 \frac{\text{кГМ}}{\text{см}^2}.$$

Трехсигмовая оценка для истинного значения ударной вязкости металла данной партии равна

$$X_{\text{ист}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3} \pm 1,56 \right) \pm \frac{0,3}{\sqrt{3}} \cdot 3 = \bar{x} \pm 2,09 \text{ кГМ/см}^2.$$

Таким образом, оценка среднего значения ударной вязкости на партии по второй схеме менее точна, чем по первой.

Рассмотрим задачу в общем виде. Для этого введем обозначения: a — трехсигмовая оценка по схеме I; b — трехсигмовая оценка по схеме II; x — односигмовая оценка разброса на листе; y — односигмовая оценка разброса между листами.

Тогда

$$a = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot 3 + y \cdot 3;$$

$$b = x \cdot 3 + \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot 3.$$

Если принять во внимание, что x и y связаны между собой соотношением $k^2 = y^2 + x^2$, где k — односигмовая оценка общего разброса (в нашем случае $k = 0,6 \text{ кГМ/см}^2$), то можно аналитически установить, при каких значениях x и y схема I лучше, чем схема II. Для этого выразим y через x и решим неравенство $b > a$.

Нетрудно вычислить, что при этом

$$y < \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

В нашем случае $\frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{0,6}{\sqrt{2}} = 0,42$, т. е. выполнено условие $x > \frac{k}{\sqrt{2}}$. Это еще раз подтверждает, что оценка по схеме I точнее, чем по схеме II.

Полученная формула была использована при решении ряда задач, связанных с контролем качества в различных областях техники.

Статистика помогла. В 90-х годах прошлого века цар-

ское правительство поручило Д. И. Менделееву ответственную задачу: изучить существующие в разных странах разновидности пороха и сообщить, какой порох можно рекомендовать для русской армии. Это поручение Менделеев выполнил единственным в своем роде способом — при помощи... статистики!

Во Франции и в учреждениях военного ведомства, и на заводе, изготавливавшем порох, Менделеев встречает в высшей степени предупредительный прием. Дмитрию Ивановичу показывают патроны, позволяют держать их в руках, дают возможность рассмотреть.

— Нельзя ли взять с собой несколько патронов? — поинтересовался Дмитрий Иванович, видя, как любезен его спутник, офицер генерального штаба.

— Конечно можно, — также любезно ответил офицер, — но за разглашение военной тайны мне придется пустить себе пулю в лоб...

Менделееву оставалось одно: самостоятельно раскрыть этот секрет.

Главная проблема в изготовлении бездымного пороха заключалась не в том, чтобы установить его составные части, — они были хорошо известны. Вопрос касался лишь числовых пропорций, в которых соединялись отдельные компоненты, особенно эфир и пироколлодий.

Наш ученый заметил, что основной военный пороховой завод Франции расположен не на главной железнодорожной линии, а на глухой ветке, по которой к нему подвозили сырье. Менделеев берет статистические отчеты железных дорог и погружается в их изучение. Он делает простое предположение: запасов сырья на заводе не образуется. Годовой подвоз в среднем целиком идет в производство. Следовательно, оставалось подсчитать, сколько перевозится за год по железнодорожной ветке эфира, серной и азотной кислоты и хлопка.

Сделав необходимые расчеты, Менделеев выводит, наконец, необходимое отношение эфира к пироколлодию. Задача решена, и он возвращается в Россию, где успешно заканчивает работу по разработке состава бездымного пороха.

Интеграл варит сталь. В один из январских дней 1965 г. с самого утра в кабинете начальника центральной заводской лаборатории Орско-Халиловского металлургического комбината началось важное совещание. Из окна кабинета открывалась величественная панорама

металлургического завода. Окутанные клубами разноцветного дыма вонзались в вышину трубы мартеновских печей, подобно могучим сказочным богатырям, рядом друг с другом стояли три доменные печи, уходили за горизонт многочисленные корпуса листопрокатного, коксохимического и других цехов. Задумчиво глядя в окно, начальник центральной заводской лаборатории И. Н. Варнавский сказал:

— Думаю, что наше совещание будет иметь решающее значение для развития комбината, запомните сегодняшний день — 3 января 1965 г. Поверьте, нам еще не раз придется вспомнить решения, которые мы примем сегодня.

Совещанию, о котором идет речь, предшествовали важные события. Несколько лет назад на Севере нашей страны были обнаружены запасы природного газа, голубого золота, как называли его специалисты. Чтобы бесперебойно доставлять это дешевое топливо в центральные районы страны, нужно было выстроить мощные тысячекилометровые газотрубопроводы. Потребовалось большое количество труб. Соглашение на поставку этих труб в нашу страну было заключено с ФРГ и Швецией. Но под давлением империалистических кругов ФРГ и Швеция неожиданно объявили стальные трубы стратегическим товаром и отказались поставлять их в СССР. Перед нашими металлургами и трубопрокатчиками встала задача — в короткий срок наладить производство газопроводных труб большого диаметра, работающих в условиях низких температур. Орско-Халиловский комбинат и был одним из тех предприятий, которые должны были обеспечить поставку высококачественных стальных листов для изготовления этих труб.

Чтобы найти пути решения поставленной задачи, на комбинат приехала группа научных сотрудников Челябинского научно-исследовательского института черных металлов во главе с доктором технических наук, профессором А. Н. Морозовым. В кабинете Варнавского собрались на совещание сотрудники института, работники центральной заводской лаборатории, а также мастера, сталевары, прокатчики. С особым вниманием все слушали профессора Морозова. Разложив на столе многочисленные таблицы со статистическими данными, графики и листы, плотно исписанные всевозможными математическими формулами с интегралами, профессор из-

лагал свои соображения, лишь изредка беря со стола тот или иной лист и поднимая его высоко, так, чтобы присутствовавшие могли видеть написанные на нем формулы, коэффициенты корреляции, расчетные вероятности.

— Мы тщательно изучили технологию производства стали на вашем заводе и ее свойства, провели теоретические расчеты и пришли к выводу, что уже сегодня можно получать такой металл, который ждут от нас трубoproкатчики и строители газопроводов Крайнего Севера. Нужно не только добиться снижения углерода в стали, но одновременно повысить содержание марганца и кремния, чтобы коэффициент химического состава был не ниже 0,47. Одновременно надо использовать раскисление металла в печи. Вот что это дает.

Профессор снова вскинул над головой присутствующих бумажную «простынь» с интегралами.

— На бумаге-то так, — перебил Морозова присутствующий мастер мартеновского цеха без всяких церемоний (кто бывал на подобных совещаниях, тот знает, что церемония ни к чему, когда решается столь важное дело), — на бумаге получить хорошую сталь легко, а вот в печи гораздо труднее, это вам не интегралы рисовать, а живой металл варить. Даю голову на отсечение, что ваше предположение на практике не подтвердится — сплошной брак будет.

— Вы в какую смену работаете, товарищ?

— Сегодня выхожу в ночную.

— А не найдется ли у вас лишней спецовки?

— Найдем и спецовку, и каску, и очки защитные, да все одно — пустое это дело, поверьте моему опыту. Не первый год у огня работаю.

...Ночная смена началась как обычно. В сполохах огня озабоченно сновали у мартеновских печей люди, вдоль рабочей площадки перемещались вагонетки с шихтой, завалочные машины своими огромными хоботами заталкивали внутрь печей руду, известняк, металлолом. Поначалу никто и не обращал внимания на незнакомого человека в спецовке, который стоял у приборного щитка и время от времени о чем-то советовался со сталеваром или его подручными, в цехе каждый был занят своим делом, и казалось, будто у людей нет ни секунды, чтобы перекинуться друг с другом словечком. Но не прошло и часа, как весь цех знал, что профессор сам решил ва-

ритель стал по своей технологии. На площадке время от времени появлялись сталевары с других печей, лаборанты, контролеры ОТК, даже несколько человек прибегало из соседнего конверторного цеха. Любопытно было, как она идет, «профессорская» плавка. Ведь, что ни говоришь, много всяких умных людей перебивало в цехе, и кандидаты, и доктора наук, но чтобы вот так запросто надеть рабочую спецовку и стать к печи, да не просто стать, а вести плавку грамотно, с большим знанием дела (а это люди могут определить быстро). — вот такое здесь видели впервые. Это вызывало уважение и обычное здесь, в цехе, беспокойство: как она пройдет, эта плавка?

Под утро, когда из-под сводов цеховой кровли первые блики дневного света проникли на рабочую площадку, когда из лаборатории передали последние результаты химического анализа, профессор снял каску, усталое стерло лба пот, оставляя сажистые полосы, и сказал: «Кажется, все в порядке, начинайте выпуск».

К нему подошел мастер.

— Александр Николаевич, вы уж не обижайтесь, забудьте, что вчера я вам наговорил, ведь никак не думал, что интегралы могут помочь варить сталь.

— Ничего, бывает, только как вот насчет головы, а?! — усмехнулся профессор. — Ну, да что там: повинную голову меч не сечет...

Невероятно, но факт... Итак, используя вероятностные методы, мы заглянули в глубь изучаемых явлений, подобно тому, как, пользуясь электронным микроскопом, ученые проникают в тайны строения вещества. На наш взгляд, наступило то время, когда с полным правом можно говорить о формировании вероятностного мировоззрения, которое должно стать неотъемлемой частью диалектико-материалистического мировоззрения. Сейчас современному специалисту знание элементарных приемов вероятностно-статистической обработки экспериментальных и производственных данных крайне необходимо.

Проиллюстрируем эту мысль на таком примере. При существовавшей в мартеновском цехе технологии выплавки стали 17ГС брак составлял в среднем 2,5%. Группа работников цеха предложила новую технологию производства стали, которая была проверена на нескольких опытных плавках. Брак оказался равным 2,1% т. е. был явно ниже.

На основе этих статистических данных приняли решение перейти на новую технологию выплавки. В цехе провели необходимую реконструкцию. Но, к немалому удивлению авторов предложения и руководства цеха, брак не снизился, а остался примерно на том же уровне, каким он был раньше.

«В чем дело?» — удивленно спрашивали «новаторы» друг друга. А между тем разгадка очень проста — никто в цехе не учел флуктуационный, т. е. вероятностный, характер такого показателя, как качество металла, которое характеризуется величиной брака. Ведь снижение брака на опытных плавках по сравнению с обычными могло носить чисто случайный характер. Стоило лишь сравнить две эти величины по правилу сравнения средних арифметических с учетом колеблемости этих величин, и стало бы ясно, что наблюдаемое расхождение между 2,5 и 2,1 в данном случае не является существенным, а лежит в пределах обычных колебаний качества продукции. Но, к сожалению, в цехе никто не знал указанного вероятностного метода сравнения средних арифметических. «Плата за незнание» была велика в буквальном смысле этого выражения.

Важно также научиться философски осмысливать полученные вероятностно-статистические оценки. Нужно правильно понимать характер соотношения этих оценок и реального опыта. Здесь тоже имеется определенная специфика. Иногда приходится слышать мнение о том, что для того, чтобы стать специалистом по прикладной математике, достаточно, например, инженеру самостоятельно проработать солидный курс по математическому анализу да для расширения кругозора ознакомиться с содержанием одной-двух работ Бурбаки.

Именно по такому пути пошли в одном техническом вузе, где решили по особой программе готовить инженеров-математиков. Однако из этой затеи ничего не получилось. Подготовленные таким образом студенты совершенно не владели тем, что составляет специфику прикладной математики — они не умели построить достаточно адекватную математическую модель реального процесса, не могли провести оценку параметров реального процесса по опытным данным, а выводы, которые они делали на основе математических расчетов, как правило, не отвечали тому, что наблюдалось на практике.

Вероятностные методы составляют основную часть

прикладной математики, и от того, в какой мере удастся выработать у студентов вероятностное мировоззрение, зависит качество подготовки специалистов по прикладной математике. Правильное и объективное применение теории вероятностей к действительному миру опытов в большой степени облегчает схема, разработанная академиком А. Н. Колмогоровым (см. стр. 24). Правда, как и всякая схема, она не может дать ответы на все вопросы практики. Такие вопросы возникают постоянно и находят разрешение в трудах ученых.

Например, в последнее время все настойчивее начинает звучать мнение о том, что нормальный закон распределения вероятностей не обладает той универсальностью, которую ему приписывали раньше. На практике большинство параметров реальных процессов имеют «анормальный» характер. Поэтому возникает потребность более углубленно изучать физику явлений, что, в свою очередь, заставляет разрабатывать теоретические схемы вероятностных явлений, в основе которых лежат случайные величины, имеющие закон распределения вероятностей, отличающийся от нормального.

«РУСАЛКА» И ИНЖЕНЕРЫ

Быль о «русалке» и инженерах. Начальник лаборатории одного из металлургических заводов на Урале проводил оперативное совещание прямо в цехе, где в нескольких метрах гудел и вздрагивал прокатный стан, окутанный клубами дыма.

— Я не доволен вашей работой, — резко обратился он к молодому инженеру, — посмотрите, сколько тонн бракованной продукции, а вы спокойно взираете на это.

— Брак идет по ударной вязкости стали, а эту характеристику не зря называют «металлургическая русалка». Она зависит от многих факторов производства, и эта зависимость носит вероятностный характер...



— Вот что, юноша, — перебил молодого специалиста начальник лаборатории, — вы инженер или церковный служитель? Что вы мне рассказываете про русалок, вероятности и прочие небылицы? Есть брак, значит, есть и причина, его вызывающая, и прошу вас вместе со своими «архимедами» к вечеру эту причину установить.

...В этом диалоге столкнулись не просто два инженера, а два мировоззренческих подхода. Один подход в духе лапласовского детерминизма, исходящий из концепции только о необходимой «связи всего»; другой — в духе вероятностной причинности, рассматривающий любую динамическую систему как единство случайного и необходимого. Эту точку зрения хорошо выразил отец кибернетики Норберт Винер в своей известной книге «Я — математик». «...Причинность есть нечто могущее присутствовать в большей или меньшей степени, — писал он, — а не только быть или не быть».

О том, как измеряется «степень присутствия причинности», и пойдет наш рассказ.

...9 февраля 1877 г. сэр лорд Ф. Гальтон выступал с очередным сообщением о наследственности таланта на заседании Королевского научного общества в Лондоне. Чопорные члены общества сонно пропускали мимо ушей длинные тирады докладчика, а в тех местах, где Гальтон начинал писать математические формулы, зал начинал недовольно гудеть. Несколько раз Гальтон употребил незнакомый термин «корреляция». Вряд ли кто из присутствующих мог тогда предполагать, что именно в этот день произошло крещение новой науки — теории корреляции. Разработка этой науки составила бессмертную славу Ф. Гальтона.

Десятки великих математиков в дальнейшем внесли тот или иной вклад в развитие теории корреляции, и начало всем этим исследованиям положил первый бесхитростный пример Гальтона. Гальтон изучал зависимость роста сыновей от роста отцов. Им был собран значительный статистический материал, на основании которого ученый сделал вывод о том, что в среднем рост сыновей уменьшается по сравнению с ростом отцов. Он даже вычислил уравнение этой зависимости, которое назвал уравнение регрессии. Отсюда термин «регрессия» и вошел в математику. Об уравнении регрессии будет подробно рассказано в дальнейшем, а пока ограничимся замечанием о том, что вывод Гальтона об уменьшении роста сы-

новой по сравнению с ростом отцов не нашел подтверждения в исследованиях других ученых. Тем не менее метод, им разработанный, был взят на вооружение всеми, кому приходилось и приходится обрабатывать экспериментальные данные.

Наибольший вклад в дальнейшую разработку теории корреляции внес русский ученый А. А. Чупров (1874—1926). Им была создана математическая теория корреляции. После работ Чупрова центр научной мысли по проблемам корреляции переместился в Россию. Своеобразно произошло признание этого ученого за рубежом. Обнаружив ряд ошибок и методологических неточностей в трудах Гальтона и его учеников, Чупров написал письмо в порядке личной переписки, не желая подрывать авторитет всемирно известной школы. Но каково было его удивление, когда он через полгода получил свежий том журнала «Биометрика», где под названием «Согрешили» была напечатана статья с исправлениями допущенных ошибок и выражением благодарности Чупрову. Один из учеников Гальтона Карл Пирсон в этом же журнале давал высокую оценку научным заслугам А. А. Чупрова и признавал, что его исследования «вызвали всеобщее восхищение».

Рассмотрим теперь, что такое корреляция. Для того, чтобы оптимизировать любой процесс, необходимо достаточно углубленное и обоснованное представление о характере взаимозависимости тех или иных факторов, характеризующих его. Зачастую в технике зависимости между величинами достаточно точно описываются известными физическими и физико-химическими законами. Например, зависимость силы тока от сопротивления при постоянном напряжении описывается законом Ома $I = \frac{U}{R}$.

Здесь каждому значению R (при постоянном U) соответствуют строго определенные значения I . Такая зависимость называется функциональной.

Однако на практике чаще приходится сталкиваться с подобными задачами, когда одному значению аргумента могут соответствовать различные значения функции. На рис. 11 изображена зависимость предела прочности σ_b стали 14ГН от содержания углерода. В силу того, что на величину предела прочности влияет не только содержание углерода в стали, но также ряд других факторов (марганец и кремний, изменение технологии,

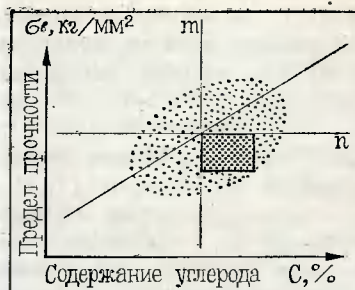


Рис. 11. Геометрическая интерпретация метода наименьших квадратов.

погрешности испытания и пр.), одному значению содержания углерода соответствует ряд значений прочности, имеющий определенное распределение (и, наоборот).

Такая связь называется корреляционной связью (от древнелатинского слова *correlation*, что означает взаимозависимость). Установление формы, силы и тесноты корреляционной связи и

составляет задачу корреляционного анализа. Рассмотрим, что представляют собой эти характеристики связи.

Форма уравнения связи устанавливается на основании тщательного анализа ее объективной природы. При установлении формы связи в первую очередь должны приниматься во внимание теоретические соображения, а также результаты предыдущих исследований. Так, при изучении глубины вдавливания клейма от энергии клеймодержателя на основании теоретических соображений можно предположить прямолинейный характер зависимости. В случае отсутствия каких-нибудь теоретических или технологических соображений относительно характера зависимости необходимо построить графическое изображение рассматриваемых переменных (так называемое корреляционное поле точек). Характер расположения точек дает представление о форме связи. Так, например, очевидно, что зависимость предела прочности стали 14ГН от содержания углерода носит прямолинейный характер (см. рис. 11). Значит, в этом случае мы имеем все основания искать уравнение зависимости предела прочности от содержания углерода в прямолинейной форме $y = ax + b$.

Сила связи. В 1806 г. французский математик Лежандр (1752—1833) показал, что наилучшим образом будет отражать связь между переменными линия, для которой выполняется следующее условие

$$S = \sum_{i=1}^n (y_{i\text{фак}} - y_{i\text{рас}})^2 = \min, \text{ где } y_{i\text{фак}} \text{ — фактическое,} \\ y_{i\text{рас}} \text{ — расчетное.}$$

Этот способ называется «метод наименьших квадратов» и широко используется при обработке данных. Для того чтобы найти уравнение $y = ax + b$, нужно определить коэффициенты a и b , удовлетворяющие методу наименьших квадратов. Это значит, что значения величин a и b должны быть подобраны таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений фактических значений от тех значений, которые будут вычислены по уравнению $y = ax + b$, была наименьшей, т. е.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \min.$$

Дифференцируем данное выражение по a и b и приравняем оба уравнения к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-1) = 0. \end{cases}$$

После простых алгебраических преобразований имеем систему

$$\begin{cases} nb + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \\ b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i. \end{cases}$$

Эта система называется нормальной. Решив ее, найдем a и b . Найденный коэффициент a является коэффициентом регрессии. Он выражает силу связи, или, иначе, на сколько единиц изменится в среднем выходной параметр y , если изменение входного параметра x произойдет ровно на единицу. Чем больше a , тем связь сильнее.

Пример. По четырем плавкам изучалась зависимость между количеством листов, имеющих брак по пузырю (x) и количеством листов, имеющих брак по расслою¹ (y). Вычисления были сведены в следующую таблицу.

¹ «Пузырь» и «расслоя» — два вида дефектов на поверхности стального листа.

Расчетные величины	„Пузырь“ x_i	„Расслой“ y_i	x_i^2	$x_i y_i$
Условные значения видов брака	1 2 3 4	1 1 2 3	1 4 9 16	1 2 6 12
С у м м ы	10	7	30	21

Вычисленные суммы используем для составления системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} 4b + 10a = 7; \\ 10b + 30a = 21. \end{cases}$$

Решение ее не составляет труда, поэтому мы на нем не задерживаем внимание читателя: $b=0$, $a=0,7$.

Уравнение имеет вид $y = 0,7a$.

Теснота связи. При изучении зависимости предела прочности стали от содержания в ней углерода для двух разных марок стали были построены графики. В обоих случаях линии, выражающие зависимость предела прочности от содержания углерода, составляют одинаковые углы с осями. Это означает, что в среднем одинаковым изменениям углерода соответствуют одинаковые изменения пределов прочности для обеих марок стали. В таком случае говорят об одинаковой силе связи между двумя признаками (в данном случае — содержание углерода и предел прочности стали). Однако можно ли считать обе зависимости одинаковыми? Для стали 3сп точки разбросаны сильнее, чем для стали 17ГС. Практически это означает, что каждому значению содержания углерода будет соответствовать больший разброс значений предела прочности в случае стали 3сп, чем в случае стали 17ГС. В этом находит отражение вторая сторона статистической связи между парой переменных признаков — теснота связи.

На определенном этапе перед учеными возник вопрос, как количественно оценить эту сторону связи. Нужно было изобрести такие математические веса, которые, взвесив колебания каждой из точек совокупности, дали бы обобщенную оценку тесноты связи. Такими весами в слу-

чае линейной зависимости является коэффициент корреляции. Уяснить его смысл нам поможет рис. 11.

Точки, нанесенные на графике, выражают уже рассмотренную нами выше зависимость между пределом прочности и содержанием углерода в стали. Линии m и n соответствуют средним значениям σ_b и C . Очевидно, что для каждой точки можно подсчитать произведение отклонений от двух средних значений $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. На графике это произведение выражается заштрихованным прямоугольником. Найдя среднее значение всех произведений фактических отклонений от средних $C_{yx} =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n},$$

получим величину, характеризующую

среднюю величину разброса точек. Эта величина называется *ковариацией* (covariation, что означает сопряженное варьирование) и, характеризует в некоторой степени тесноту связи.

Попробуем разобраться, удовлетворит ли эта характеристика строгим требованиям практиков? Являясь размерной величиной, ковариация в первую очередь зависит от масштаба, выбранного по осям. Следовательно, не представляется возможным сравнивать ковариации для разных зависимостей. Но этот недостаток ковариации легко исправить, если отнести ее к произведению средних квадратических отклонений $\sigma_x \cdot \sigma_y$. Полученное отвлеченное число и будет являться коэффициентом корреляции, который, как мы убедимся в дальнейшем, обладает целым рядом замечательных свойств и уже десятки лет достойно несет роль измерителя тесноты связи. Вышесказанное коротко можно записать в виде такой формулы:

$$r_{yx} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где r_{yx} — коэффициент корреляции.

Коэффициент корреляции является отвлеченным числом.

Изменчивость признака. Как известно, одной из важнейших характеристик случайной величины является разброс значений, которые она принимает. Так, например, при контроле стальных листов на ударную вязкость можно наблюдать такую картину, что при довольно вы-

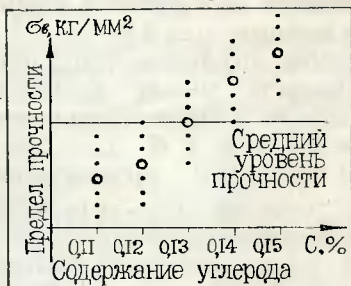


Рис. 12. Разложение дисперсии.

значений изучаемого признака, а какие в меньшей.

Статистический подход к такой задаче проиллюстрируем наглядным примером. Этот пример поможет уяснить основную идею дисперсионного анализа. На рис. 12 показана зависимость предела прочности стали марки 14ГН от содержания углерода.

Здесь по оси абсцисс отложены значения содержания углерода, а по оси ординат предел прочности стали. Кружочками отмечены средние значения предела прочности при том или ином содержании углерода. Рассмотрим, как расположены значения предела прочности при содержании углерода 0,11%. Очевидно, что наблюдается некоторый разброс точек вокруг среднего значения прочности. Нетрудно понять, что поскольку содержание углерода одно и то же (0,11%), то разброс точек объясняется всеми прочими факторами, кроме углерода. (Это могут быть элементы химического состава стали, температура стали на выпуске, скорость выгорания углерода и даже температура окружающего воздуха). Теперь важно как-то измерить величину разброса.

Обозначив среднее значение \bar{y} , а для любой другой точки $y_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$, найдем $\bar{y} - y_1$ для первой точки, $\bar{y} - y_2$ для второй точки и т. д., просуммировав квадраты полученных разностей и разделив полученную сумму на число n , равное числу точек, получим величину $\sigma^2 =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - y_i)^2}{n},$$

которая называется *выборочной*

дисперсией и принята в качестве измерителя колеблемости случайной величины.

Если вычислить дисперсии при каждом фиксированном значении углерода и просуммировать их, то найдем ту долю колеблемости изучаемого признака, которая обусловлена влиянием всех факторов, кроме углерода. А теперь обратимся к рассмотрению средних значений. Чем объяснить разброс их вокруг общей средней? Очевидно, влиянием углерода. Это влияние тоже можно оценить дисперсией. По этой же формуле вычислим общую дисперсию признака. С математической точностью можно доказать, что

$$\sigma^2_{\text{общ}} = \sigma^2_{\text{угл}} + \sigma^2_{\text{ост.}}$$

Сравнивая специальным способом $\sigma^2_{\text{угл}}$ и $\sigma^2_{\text{общ}}$, можно сделать вывод о том, является ли влияние углерода существенным по сравнению с влиянием остаточных факторов.

При изучении корреляционной зависимости между параметрами необходимо иметь ясное представление о природе изучаемого явления. Неосторожная интерпретация результатов корреляционного анализа может привести к грубым ошибкам. На одном металлургическом заводе изучалась корреляционная зависимость содержания серы в готовом металле от количества извести в период доводки. В тех плавках, во время которых давалось большое количество известняка в доводку, отмечается повышенное содержание серы в готовом металле.

Этот вывод явно противоречит общетеоретическим представлениям о том, что известняк способствует уменьшению содержания серы в металле. В чем же дело? Оказывается, данные для анализа были взяты из плавов, проведенных с большим промежутком времени, в течение которого уменьшилось количество известняка, загружаемого в мартеновскую печь при доводке, и количество серы в чугуне, т. е. связь между двумя факторами оказалась обусловленной влиянием третьего так называемого «общего» фактора — времени.

Классическим примером ложной корреляции является следующий — с увеличением объема промышленной продукции в Англии увеличилось число новорожденных во Франции.

Предпосылки корреляционного анализа. В последние годы корреляционный анализ получил строгое математическое изложение в трудах советских математиков А. Н.

Колмогорова и Ю. В. Линника. Корреляционный анализ базируется на ряде предпосылок; эти предпосылки, с одной стороны, хорошо описывают то, что встречается на практике, а с другой стороны, позволяют дать точное математико-статистическое обоснование полученных результатов. Для удобства все предпосылки разбиты на три группы:

Первая группа (вход):

- 1) входные параметры x_1, x_2, \dots, x_n известны точно;
- 2) входные параметры x_1, x_2, \dots, x_n независимы, т. е. математическое ожидание $M(x_l \cdot x_k) = 0$, если $l \neq k$.

Вторая группа (выход):

$$1) l_i = y_i + \Delta_i$$

где y_i — истинная величина; l_i — фактическая величина;

2) Δ_i — случайная величина, причем Δ_i независимы. Математическое ожидание $E(\Delta_i) = 0$; Δ_i — распределено нормально, т. е. $\Delta_i \in N(0, \sigma)$, где N — нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 0, и средним квадратическим отклонением σ ;

3) Δ_i — равноточны, т. е. $E(\Delta_i^2) = \sigma^2$.

Третья группа (связь):

$$1) y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$\text{или } y = \sum_{j=1}^n a_j x_j;$$

2) рассматривается избыточная система линейных уравнений: $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$; $N \geq n$ — это и есть условие избыточности;

3) если y_i известны точно, то уравнения совместны, т. е. ранг матрицы $\|x_{ij}\|$ равен n .

Объем книги не позволяет показать, как на основе приведенных предпосылок строится строгая математическая теория, однако при практическом использовании методов корреляции никогда нельзя забывать о тех условиях, при которых реальная интерпретация результатов имеет смысл.

Приведя выше изложенные аксиомы, образно говоря, мы как бы приоткрыли дверь в математическую теорию корреляции, но, к сожалению, у нас нет возможности пройти по ее просторным залам.

Неразрушающий контроль качества. Пусть некоторый параметр, который нам нужно оценить, недоступен для

измерения или наблюдения в производственных условиях; в то же время имеется другой параметр, корреляционно связанный с первым, который можно измерить. Тогда в лабораторных условиях измеряют оба параметра и находят уравнение корреляционной связи между ними. Затем это уравнение используется на практике при прогнозировании значений недоступного для измерения параметра. Этот метод лежит в основе одного из способов неразрушающего контроля качества, который нашел широкое применение при контроле сталей, огнеупоров и многих других промышленных изделий. Рассмотрим порядок и некоторые особенности использования неразрушающего корреляционного контроля на примере исследовательской работы, выполненной одним из авторов на Тамбовском заводе полимерного машиностроения («Тамбовполимермаш»).

Нужно было установить и исследовать корреляционные связи между прочностными характеристиками и твердостью деталей (втулки, валы, шестерни и т. д.), изготовленных из сталей 45 и 40Х. Поскольку корреляционные зависимости позволяют найти предел текучести и временное сопротивление деталей по их твердости, то необходимость разрушения деталей при определении их прочностных свойств исключается.

Методами корреляционного анализа была произведена статистическая обработка результатов механических испытаний 71 образца из стали 45 и 98 образцов из стали 40Х. Из каждого прутка вырезали 9—10 заготовок для разрывных образцов. 30 образцов из стали 45 и 30 — из 40Х были испытаны в нетермообработанном состоянии. Остальные образцы перед механическими испытаниями подвергали обработке в лабораторных муфельных печах по специальным режимам термообработки, принятым на заводе. Закалку образцов из стали 45 производили в масле, а из стали 40Х — в воде, отпуск осуществляли на воздухе.

Предел текучести, временное сопротивление и относительное удлинение образцов определяли на разрывной машине ГРМ-50. Твердость термообработанных образцов находили на отшлифованном участке головки образца по Роквеллу (HRC), а твердость не подвергнутых термической обработке — по Бринелю (кг/мм^2). Твердость по Роквеллу определяли с помощью алмазного конуса с углом при вершине 120° . Испытание на твердость

по Бринеллю производили с помощью шарика диаметром 10 мм при нагрузке 3000 кг.

Первоначально были построены и проанализированы графики равномерности механических свойств сталей для всех термообработанных и нетермообработанных образцов. Точки, имеющие значительное отклонение от среднего уровня свойств, были исключены из дальнейшего рассмотрения.

С целью изучения корреляции между временным сопротивлением и твердостью были построены корреляционные поля отдельно для каждого режима термообработанных образцов. По эмпирическим линиям регрессии оценивали взаимосвязь между показателями прочности и твердости. Наиболее тесная корреляционная зависимость между твердостью и прочностью была обнаружена для стали 45 при следующем режиме термообработки температура закалки 850°С, температура отпуска 600°С.

Затем были объединены экспериментальные данные по образцам с различными режимами термообработки и изучена корреляционная связь между прочностью и твердостью независимо от режима термообработки. Для обеих марок стали в термообработанном состоянии с увеличением твердости HRC на одну единицу предел прочности возрастает в среднем на 2 кг/мм².

Изучена корреляция между пределом текучести и твердостью сталей 45 и 40X. Во всех рассмотренных случаях с увеличением твердости стали предел текучести по-

Сталь	Вид обработки	Уравнение регрессии	Коэффициент корреляции	Ошибка в коэффициенте корреляции	Коэффициент детерминации, %
45	Нетермообработанные	$y=0,4x-1$	0,65	0,10	42
45	Термически обработанные	$y=2x+50$	0,58	0,10	34
40X	Нетермообработанные	$y=0,224x+29,3$	0,62	0,11	38
40X	Термически обработанные	$y=2x+85$	0,56	0,09	31

Примечание. В уравнения корреляционной связи для нетермообработанных образцов нужно подставлять значения твердости по Роквеллу в единицах HRC, а в уравнения корреляционной связи для термообработанных образцов — значения твердости по Бринеллю в кг/мм².

вышается, однако не в столь значительной степени, как временное сопротивление. С возрастанием твердости НВ на 1 кГ/мм² предел текучести увеличивается в среднем всего лишь на 0,1 кГ/мм².

В качестве завершающего этапа исследования по рассмотренным статистическим данным были вычислены уравнения регрессии отдельно для обеих марок стали для нетермообработанных и термообработанных образцов.

В таблице приведены также коэффициенты корреляции, ошибки в коэффициентах корреляции и коэффициент детерминации, равный квадрату коэффициента корреляции и выраженный в процентах. Коэффициенты корреляции для нетермообработанных образцов несколько выше, чем для термообработанных. Это позволяет заключить, что для нетермообработанных образцов корреляция более выражена.

Отношение коэффициента корреляции к его ошибке во всех рассмотренных случаях больше трех, что свидетельствует о статистической достоверности всех зависимостей. По коэффициентам детерминации, приведенным в таблице, видно, что примерно 30—40% вариации прочности обусловлены твердостью стали.

Приведенные корреляционные уравнения используют в практике работы завода «Тамбовполимермаш», для прогнозирования прочности стальных деталей по их твердости.

Парадокс Джиффена. Исследование статистических взаимосвязей между явлениями является одной из наиболее увлекательных задач теории вероятностей. Здесь известно много загадок и парадоксов, возникающих в довольно простых и, казалось бы, очевидных ситуациях. В конце прошлого века английский статистик Джиффен установил, что при повышении цены на дешевый, но необходимый товар (например, хлеб) спрос на него увеличивается, а не уменьшается, хотя как будто бы является очевидным, что с повышением цены на товар спрос на него должен падать.

На практике все происходило по довольно занятному принципу: «Чем дороже хлеб, тем больше его едят». Среди математиков и экономистов это явление получило название парадокса Джиффена. И, несмотря на элементарность ситуации, разгадать этот парадокс очень долго никому не удавалось.

Только в 1915 г. в одном итальянском экономическом журнале появилась статья русского математика и экономиста Е. Е. Слуцкого (1880—1948). «К теории сбалансированного бюджета потребителя», в которой давалось исчерпывающее объяснение этого парадокса. Не будем приводить математические выкладки Слуцкого, только скажем, что ему удалось распутать этот клубок взаимосвязей и выявить наиболее существенные из них благодаря глубокому знанию теории вероятностей.

Результаты, полученные им, коротко можно изложить так: повышение цены на товар должно повлечь за собой понижение покупательной способности, однако если товар насущно необходим (каковым и является хлеб), то спрос на него не может сократиться, как бы ни менялась цена в пределах бюджета покупателя. Поэтому спрос на хлеб не уменьшился, а уменьшились возможности покупки других более дорогостоящих продуктов (мясо, масло и т. д.). Значит, вместо этих продуктов приходится покупать более дешевый продукт, т. е. ... хлеб.

Вопросы ценообразования, основанные на вероятностных методах, весьма актуальны и в наши дни. Поэтому теория вероятностей с большой пользой может быть применена для изучения спроса населения и прогнозирования потребления.

Возраст доисторического человека. Исторически теорию корреляции стали применять в биологии раньше, чем в других областях естествознания. Французский биолог Ж. Кювье в 1800—1805 гг. в своих знаменитых «Лекциях по сравнительной анатомии» сформулировал известный принцип биологической корреляции. Он утверждал, что любая часть организма непременно согласована с другими частями, следовательно, по одному органу можно судить о целом организме. Кювье говорил: «Дайте мне орган и я построю весь организм животного».

Дальнейшее развитие принцип биологической корреляции нашел в трудах Браве, Гальтона и Пирсона. В 1899 г. английский ученый К. Пирсон (1857—1936) — создатель математической теории корреляции — вывел формулу, связывающую рост современного человека, с длиной его бедра. Используя эту формулу, по длине ископаемого бедра Пирсон определил рост... доисторического человека. Результаты, полученные им, вызывают определенное сомнение, так как выведенная формула

определена по антропологическим данным современного человека, а использовалась для расчета антропологических характеристик доисторического человека. Тогда как в те времена установленная зависимость, вероятнее всего, носила другой характер.

Более серьезное применение принцип биологической корреляции нашел в работах советского антрополога и скульптора доктора исторических наук М. М. Герасимова (1907—1970), который создал по черепам на основе разработанного им метода более 200 скульптурных портретов ряда исторических деятелей: Ярослава Мудрого, Андрея Боголюбского, Тимура, Ивана Грозного, Шиллера, Ушакова, Рудаки и других. Эти работы Герасимова получили известность во всем мире.

Корреляционный анализ и производительность труда. Методы корреляционного анализа нашли широкое применение при исследовании факторов, влияющих на производительность труда. Как известно, показатели производительности труда являются наиболее важными при оценке работы предприятия. Чтобы правильно планировать работу фабрики или завода, оперативно управлять производством, необходимо не только знать эти факторы, но и определить, какие из них влияют в большей степени и, следовательно, требуют к себе более пристального внимания экономических служб. Решить эту задачу можно методами корреляционного анализа.

Эти методы были использованы одним из авторов при анализе факторов, влияющих на производительность труда на заводе «Тамбовполимермаш». Были обработаны данные текущей отчетности завода за три года. Сложность современного промышленного производства, большое количество факторов и причин, определяющих нормальную работу предприятия, вероятностный характер взаимосвязей между ними создают благоприятные предпосылки для использования метода корреляции. Однако в каждой конкретной области применения возникают свои специфические особенности и затруднения, правильное разрешение которых во многом предопределяет успех всего исследования.

Первое затруднение, связанное с анализом производительности труда, состоит в выборе такого показателя производительности, который наилучшим образом отвечал бы задаче исследования. На тамбовском заводе в качестве показателя производительности труда было при-

нято отношение: $p = B/n$, где B — валовое производство продукции в денежном выражении (тыс. руб.) за месяц, n — количество работающих на предприятии в данном месяце.

Второе затруднение связано с выбором факторов, влияющих на производительность труда, которые нужно подвергнуть корреляционному анализу. Поскольку из опыта работы предприятия такие факторы известны (правда, весьма ориентировочно, без количественной оценки), то за основу можно взять перечень, приведенный в техпромфинплане предприятия. На тамбовском заводе было выделено 10 таких факторов. В таблице приведены они, а также условные единицы их измерения.

Группы факторов	№ п/п	Факторы, влияющие на производительность труда	Условные единицы измерения
Повышение технического уровня производства	1	Внедрение прогрессивной технологии	100 тыс. нормо-часов
	2	Механизация и автоматизация производства	То же
	3	Снижение трудоемкости за счет изменения конструкции изделий	"
	4	Сокращение потерь от брака	1 %
Улучшение организации производства и труда	5	Научная организация труда	0,1 %
	6	Относительное сокращение ППП ¹ (без производственных рабочих) в связи с увеличением объема производства	100 человек
	7	Сокращение потерь рабочего времени	1 %
	8	Уменьшение числа рабочих, не выполняющих норму выработки	10 человек
Структурные изменения в производственной программе	9	Изменение удельного веса новой продукции в общем выпуске в результате чего изменяется трудоемкость производственной программы	10 %
	10	Изменение удельного веса покупных полуфабрикатов и кооперированных поставок	10 %

¹ ППП — производственно-производительный персонал.

В качестве предварительного анализа статистических данных были построены по каждому фактору эмпирические линии регрессии. По ним в первом приближении можно оценить степень влияния того или иного фактора. На графике (рис. 13) показано, как влияет на производительность труда сокращение потерь от брака. Из рисунка видно, что увеличение брака на 1% влечет за собой снижение производительности труда одного работника в среднем с 0,45 тыс. рублей до 0,37 тыс. рублей.

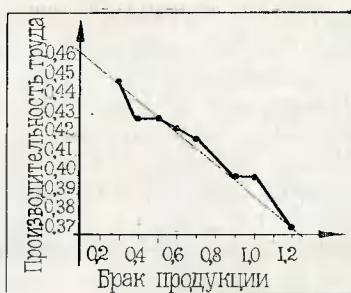


Рис. 13. Влияние брака продукции на производительность труда.

Анализ корреляции и регрессии между двумя показателями хотя и дает некоторое представление о влиянии факторов, но при этом остается неучтенным их сложное сплетение, взаимосвязь друг с другом. Более точную оценку влияния можно получить, используя методы множественной корреляции, с помощью которой изучают зависимость выходного параметра от нескольких входных параметров.

При помощи этих методов было найдено уравнение множественной корреляции, выражающее зависимость производительности труда от рассматриваемых факторов:

$$P = 0,34 + 0,01 x_1 + 0,01 x_2 + 0,02 x_3 + 0,05 x_4 + \\ + 0,03 x_5 + 0,025 x_6 + 0,005 x_7 - 0,006 x_8 - \\ - 0,005 x_9 + 0,05 x_{10}.$$

Полученное уравнение используется в практике работы тамбовского завода при анализе факторов, влияющих на производительность труда, а также при расчете плановых показателей по производительности труда.

Кроме того, был вычислен коэффициент множественной корреляции $R = 0,8$. Он позволяет сделать вывод о наличии довольно тесной связи между производительностью труда и совокупностью взятых для анализа факторов. Однако более наглядный смысл имеет коэффициент детерминации $d = R^2$, который указывает, какая доля

влияния определяется рассматриваемыми факторами. В нашем случае коэффициент детерминации равен 0,64. Следовательно, 64% изменчивости производительности труда связано с изученными факторами, а оставшаяся доля (36%) не может быть объяснена влиянием рассмотренных факторов.

Чтобы более целенаправленно совершенствовать производство и повышать производительность труда, необходимо расширить круг исследований и выявить все факторы, от которых она зависит.

КТО СКАЗАЛ «А»!

Лингвистическая вероятность. Пожалуй, трудно назвать другую область знания, где бы попытки использования количественных методов (вероятностных и статистических) вызвали бы столь бурную дискуссию среди ученых, как область лингвистических исследований. Усилия сторонников математической лингвистики «поверить алгеброй гармонию» встретили серьезное возражение со стороны приверженцев традиционных методов исследования языковых и речевых стилей. В ходе дискуссии возникло много проблем.

Какие же задачи можно решать с помощью вероятностно-статистической методики в области фонетики языка и звуковой организации речи? Возможны ли математические оценки таких качеств речи, как богатство, разнообразие, выразительность и т. д.?

Любопытно, что выдающийся русский математик

В. Я. Буняковский (автор первого учебника по теории вероятностей на русском языке) еще в 1847 г. писал в журнале «Современник»: «Да позволено будет мне прибавить несколько слов о другом приложении анализа вероятностей, на которое, кажется, еще никто не указывал. Новое применение относится к грамматическим и этимологическим исследовани-



ям о каком-либо языке, также к сравнительной филологии». Как видно из этого высказывания, уже в то время В. Я. Буняковский не сомневался в полезности использования теории вероятностей в лингвистике.

Большое значение вопросам применения математических методов в лингвистике придавал известный русский математик А. А. Марков. Лингвистические исследования он использовал для экспериментальной проверки некоторых вероятностных процессов, которые по его имени названы «марковскими процессами». Результаты этих исследований А. А. Марков приводит в книге «Исчисление вероятностей». Он изучал чередование гласных и согласных букв в русском языке, для чего проанализировал последовательность из 20 000 букв в поэме А. С. Пушкина «Евгений Онегин». Он также исследовал последовательность из 100 000 букв в книге С. Т. Аксакова «Детские годы Багрова-внука».

На базе этого статистического материала Марков оценивал вероятность того, что взятая наугад буква из русского текста будет гласной. Эта вероятность существенно связана с тем, гласной или согласной была предшествующая буква. Для романа «Евгений Онегин» статистически было вычислено, что вероятность появления гласной после гласной равна 0,128, гласной после согласной — 0,663.

А. А. Марков не абсолютизировал полученные им числовые значения вероятностей. В статье «Об одном применении статистического метода», опубликованной в «Известиях Академии наук» в 1916 г., он писал: «Только значительное расширение поля исследования (подсчет не пяти тысяч, а сотен тысяч знаков) может придать заключениям некоторую степень основательности, если только границы итогов различных писателей окажутся резко отделенными, а не обнаружится другое весьма вероятное обстоятельство, что итоги всех писателей будут колебаться около среднего числа, подчиняясь общим законам языка».

Эта мысль А. А. Маркова является ключом к пониманию идей математической лингвистики. В самом деле, задача состоит не в том, чтобы вычислить какие-то вероятностные характеристики и представить их в качестве критериев творчества, а в том, чтобы определить, действительно ли то или иное значение является характерным для данного писателя или лишь отражает неизбеж-

ные колебания вокруг некоторых средних величин, подчиняясь общим законам языка.

Применение статистических методов в лингвистике получило особенно широкое распространение в трудах советских ученых в последнее время. Так, в 1963 г. Н. Д. Андреев и Л. Р. Зиндер вводят в научный обиход понятие *речевой вероятности*. В работе «Статистико-комбинаторные методы в теоретическом и прикладном языкознании» Н. Д. Андреев следующим образом поясняет этот термин. Он утверждает, что если взять из лото 32 бочонка, расклеить на них русский алфавит и перемешать, то вероятность того, что первый же вынутый бочонок окажется с буквой, изображающей гласную, будет определена дробью $6:32$, т. е. будет несколько менее 19%. Если же взять произвольный русский текст и выбрать из него наугад одну букву, то вероятность того, что она окажется гласной, будет приближенно равна 30%, колеблясь вверх и вниз от этой величины в зависимости от типа текста.

Многие авторы резко выступали против использования вероятности первого типа, утверждая, что вероятность безотносительно к типу текста или речи не имеет смысла. Они считают, что вероятность языковых единиц имеет реальный смысл лишь в конкретном аспекте: в художественной прозе или публицистике, научной или бытовой речи. Не становясь ни на ту, ни на другую сторону, мы хотели бы отметить, что лишь будущие статистические исследования позволят установить границы реального смысла вероятностей речи и покажут, каковы действительные возможности использования каждого типа вероятности в лингвистике.

Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
а	0,062	и	0,062	р	0,040	ш	0,006
б	0,014	й	0,010	с	0,045	щ	0,003
в	0,038	к	0,028	т	0,053	э	0,003
г	0,013	л	0,035	у	0,021	ю	0,006
д	0,025	м	0,026	ф	0,002	я	0,018
е, ё	0,072	н	0,053	х	0,009	ы	0,016
ж	0,007	о	0,090	ц	0,004	ь, ъ	0,014
з	0,016	п	0,023	ч	0,012	—	0,175

Примечание. Здесь к русскому алфавиту причислена «нулевая буква» — пропуск между словами, который в таблице обозначен чертой.

Так или иначе, но с легкой руки А. А. Маркова вычисление статистических и вероятностных характеристик русского языка стало модным. Наряду с некоторыми формалистическими применениями (к сожалению, имевшими место) появилось большое количество интересных и полезных исследований. Для каждой буквы алфавита была вычислена частота появления в тексте (см. табл.).

Частоты появления тех или иных букв могут быть приняты за приближенные значения вероятностей. Приведенная таблица частот находит широкое применение на практике. Так, например, знание частоты появления каждой буквы (т. е. ее вероятности) позволяет разрабатывать оптимальные коды передачи речевых текстов (об этом будет рассказано ниже).

Вероятностные исследования, какими бы абстрактными и удаленными от реальной жизни они ни казались, всегда нацелены на практику, на возможность практических применений. В этом смысле убедительные доказательства дает математическая лингвистика. Получение статистических характеристик речи необходимо для целого ряда отраслей науки и техники. Здесь в первую очередь следует назвать технику телефонной связи.

Общей задачей телефонии является передача речевых сигналов на расстояние. Однако абсолютно точное воспроизведение всех звуков при телефонном разговоре не является необходимым. Чтобы сделать передачу экономичней, нужно заведомо жертвовать некоторыми сведениями, содержащимися в речевом сигнале, которые не так важны по сравнению с другими. Статистические и вероятностные методы позволяют оценить, какие показатели речи являются наиболее важными, а какие не играют столь существенной роли. Это связано с вопросами компрессии речевых сигналов. Исключая из передачи маловероятные величины, можно значительно сузить требующуюся ширину канала связи. Дальнейшее является делом телефонной техники.

Информативность языка. Работа подавляющего большинства современных технических устройств в той или иной мере связана с переработкой и передачей информации, выраженной в виде текстовых сообщений. В связи с этим важной задачей является изучение информативности различных языков.

Вычислив, что одна буква русского алфавита несет в себе информацию, равную 5 битам (об этом говорилось

в разделе «Бит или не бит?»), мы должны тут же признать, что при подсчете нами не были учтены два обстоятельства, оказывающие существенное влияние на информативность языка. Это различная частота встречаемости букв и взаимосвязь, т. е. корреляция, между буквами. Речь идет не о смысловой связи между элементами текста, а о чисто статистических закономерностях языка, например, о таком известном факте, что буква «А» в любом русском тексте встречается гораздо чаще, чем буква «Ы».

— Таким образом, если произвести вычисления с учетом этих двух факторов, то окажется, что истинная информационная цена одной буквы русского письменного текста несколько меньше, чем 5 битов. Например, по данным В. Н. Тростникова, средняя информация на букву русского текста, вычисленная с учетом частоты (правда, без учета корреляции между буквами) оказалась равной 4,35. Еще более поразительный результат был получен А. Н. Колмогоровым, который определял реальную информативность букв по своей методике. Оказалось: на каждую букву русского языка приходится около одной единицы информации¹.

Тот факт, что реальная информативность языка значительно ниже цифровых значений, которые получаются в результате математико-статистических подсчетов, подтверждается также многими примерами из художественной литературы. В романе Жюль Верна «Дети капитана Гранта» в записке, извлеченной капитаном Гленарваном из бутылки, было смыто более 150 букв из 250. В. Н. Тростников подсчитал, что при абстрактно-статистическом подходе количество вариантов истолкования записки было бы приблизительно равно числу с 200 знаками. Прямое, что перебрать все эти варианты невозможно за многие миллионы лет. Однако Паганель и его друзья почти полностью воспроизвели текст за очень короткий срок. Это оказалось возможным благодаря корреляции между сохранившимися словами и теми, которые нужно было восстановить.

Герой рассказа Эдгара По «Золотой жук» нашел зашифрованное сообщение о зарытом кладе. В этом сооб-

¹ См. В. Н. Тростников. Теория информации и язык. — В сб.: «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики». М., «Просвещение», 1965.

щении каждая буква была обозначена своим символом. С формальной точки зрения, у этой записки было громадное число вариантов прочтения, превышающее миллион триллионов ($1 \cdot 10^{18}$). Но, приняв во внимание, что наиболее часто встречающиеся символы должны соответствовать наиболее часто встречающимся буквам, герой рассказа сумел за один вечер расшифровать записку.

Рассмотренное в этих примерах свойство языка называется *избыточностью*. Это свойство заключается в том, что некоторые слоги и даже слова мы можем угадывать по смыслу предыдущего текста, что свидетельствует о наличии избыточной информации. Мерой избыточности

языка служит величина $U = 1 - \frac{H_{ic}}{\log n}$, где H_{ic} — сред-

няя фактическая энтропия, приходящаяся на одну букву, n — число применяемых символов.

Анализ текстов наиболее распространенных европейских языков показывает, что избыточность составляет примерно 50%.

Выбор оптимального кода. Одной из главных областей, где теория информации нашла широкое применение, является теория кодирования. Что такое кодирование? Когда мы снимаем телефонную трубку и произносим какие-либо слова, то эти слова преобразуются в электромагнитные колебания, происходит как бы шифровка (кодирование) звуковых сигналов с помощью системы других сигналов.

Существуют разные методы кодирования. Пожалуй, простейшим из них является запись буквенных сообщений с помощью азбуки Морзе. Эта азбука позволяет представить любое словесное сообщение при помощи всего лишь четырех элементарных сигналов: точка, тире, короткая пауза (пробел между буквами), длинная пауза (пробел между словами). Физическая реализация азбуки Морзе может быть самой различной: от электрических импульсов и световых вспышек до «точек» и «тире» на бумаге. Помните известное стихотворение Михаила Исаковского «И кто его знает»:

...А вчера прислал по почте
Два загадочных письма —
В каждой строчке только точки,
Догадайся, мол, сама.

Коды различаются по числу элементарных символов.

Так, азбука Морзе содержит четыре элементарных символа. Еще более простым является двоичный код, т. е. код с двумя элементарными символами, например, 0 и 1. Однако выбор того или иного кода не определяет способ кодирования, т. е. способ шифрования. Даже в рамках одного и того же кода, например двоичного, возможны различные способы шифровки. Существует огромное количество способов для установления взаимно-однозначного соответствия между кодируемой системой и системой, в которой производится кодирование. Различные способы кодирования отличаются друг от друга по эффективности, т. е. одни из них могут занимать меньше времени, чем другие, для передачи одного и того же сообщения. Естественно, что в связи с этим возникает задача отыскания наивыгоднейших способов кодирования, которые называются *оптимальными кодами*.

Поставим перед собой задачу закодировать в двоичном коде 32 буквы русского алфавита. Можно поступить следующим образом: пронумеровать все буквы числами от 0 до 31, а затем эти числа представить в двоичной системе счисления. Тогда на каждую букву будет затрачено пять двоичных знаков. Самое большое число 31 записывается в двоичной системе счисления как пять единиц — 11111.

Указанный способ кодирования имеет один весьма существенный недостаток — в этом коде на изображение всех букв тратится одинаковое число двоичных знаков. В то же время частота букв в русском алфавите далеко не одинакова — некоторые буквы встречаются очень часто, а другие весьма редко. Например (в среднем), в тексте, содержащем 1000 букв, буква «о» встречается 90 раз, буква «е» 72 раза, буква «а» 62 раза, а буква «ф» всего 2 раза.

Если составить код, в котором на часто встречающиеся буквы будет затрачено мало знаков, а на редко встречающиеся буквы много знаков, то он окажется намного экономнее. Чтобы построить такой оптимальный код, необходимо знать частоту каждой буквы в тексте. Эти частоты найдены, и соответствующие таблицы приводятся во многих научных публикациях.

В книге Вентцель «Теория вероятностей» подробно рассматривается построение одного из оптимальных кодов, который получил название «код Шеннона — Фэно». В среднем для передачи одной буквы в коде Шеннона —

Фэно требуется 4,45 двоичного знака. Зная вероятность (или частоту) каждой буквы в тексте, можно, пользуясь представлениями статистической теории информации, вычислить количество информации (в битах), содержащейся в одной букве. Оно равно 4,42 бита.

Теперь легко вычислить количество информации, содержащейся в одном знаке при двух рассмотренных способах кодирования. В первом случае оно составляет 4,42 бита: $5 = 0,884$ бита; в коде Шеннона — Фэно — 4,42 бита: $4,45 = 0,994$ бита. Так как при самом лучшем способе кодирования информация одного двоичного знака не может превзойти 1 бит, то ясно, что код Шеннона — Фэно можно считать близким к оптимальному. Таким образом, зная частоту появления букв, можно улучшить телеграфную азбуку Морзе примерно на 10—12%.

При рассмотренных способах кодирования «по буквам» остается неучтенной одна важная особенность осмысленного текста, о которой говорилось выше, — это корреляция между буквами, отдельными частями слов и даже целыми словами. Если кодировать с учетом этого обстоятельства, то можно разработать еще более удобные коды, чем код Шеннона — Фэно. В русском тексте целесообразно кодировать часто встречающиеся комбинации букв, такие, как, например, «аст» «нис». В этом случае кодируются не отдельные буквы, а целые блоки, так называемое *блочное кодирование*. 218

В некоторых случаях целесообразно кодировать целые слова, а зачастую целые предложения и даже куски осмысленного текста. Проанализируем, например, содержание телеграмм, отправляемых накануне нового года. Большинство из них совпадает не только по содержанию, но даже по набору слов и их сочетанию: «Поздравляю с Новым годом, желаю счастья...», «Шлем новогодние поздравления и наилучшие пожелания...» и т. д. и т. п.

Если кодировать наиболее часто встречающиеся варианты поздравительных телеграмм, то количество знаков, которые нужно передавать по линии телеграфной связи, значительно уменьшится, а количество информации, приходящейся на один знак, существенно возрастет. Таким образом, пропускная способность линий связи может меняться в зависимости от способа передачи информации. Доктор физико-математических наук И. М. Яглом составил таблицу, которая характеризует сравни- 219

гельную пропускную способность различных линий связи.

Технические линии связи	Биологические линии связи	Пропускная способность, бит/с
Телевизор	Зрение	1 000 000
Электронно-счетные машины	Осязание (?)	100 000
Радио, телефон, фототелеграф	Слух	10 000
Телеграф	Головной мозг человека	100

Приведенные данные носят ориентировочный характер и претендуют лишь на указание порядка величины. Так, например, пропускная способность головного мозга человека, которая определялась более точным методом на основании психологических экспериментов, близка к величине всего лишь 50 бит/с.

ЧИСЛА ВЫИГРЫВАЮТ БОЙ

Моделирование боевых действий. Перечисляя различные области, в которых находят применение вероятностные методы, нельзя не сказать о вероятностном моделировании боевых действий. Историки подсчитали, что за последние 5 тыс. лет мир на Земле царил только 292 года. Все остальное время было занято войнами, которых насчитывается 14 513. Войны унесли 3 млрд. 640 млн. человеческих жизней.



В наши дни, когда армии прекрасно оснащены передовой техникой, бой стал необычайно динамичным: каждую минуту меняется ситуация.

Вот почему в последнее время широко используются ЭВМ и различные математические методы для анализа и управления боевыми действиями. Опираясь на такие науки, как теория игр, исследование операций, теория принятия решений, математики совместно с военными описывают ход боевых действий, решают оперативно-тактические задачи.

В основе разработки и использования «математической теории войны» лежит вероятностное моделирование военных действий. Этот метод отнюдь не нов, так как еще в 1790 году перед штурмом Измаила великий русский полководец А. В. Суворов использовал модель крепостных стен, на которой отрабатывались наилучшие приемы штурма. Во время второй мировой войны перед нападением на базу американского флота Пирл-Харбор японцы построили модель этой базы со всеми имевшимися на ней заграждениями и отрабатывали на этой модели наилучший вариант внезапной атаки. В наше время при проведении командно-штабных учений и военных игр также применяются различные модели.

Существенным недостатком многих из них является то, что они не учитывают элемент случайности, который неизбежен в таких сложных событиях, как боевые действия. После появления быстродействующих электронно-вычислительных машин такой подход приобретает все большую роль в военной науке.

Одной из первых работ по вероятностно-математическому моделированию явилась работа английского математика и священника Ланчестера, выполненная в 1916 г. В ней рассматривались боевые действия авиации. Значительный интерес к математическому и, в частности, к вероятностному моделированию боевых действий возник в ходе второй мировой войны и в послевоенный период.

Дуэльные модели. В основе математического моделирования военных действий лежат простейшие модели столкновений, так называемые *дуэльные модели*.

Примером дуэльной модели служит модель поединка между двумя противниками, из которых один имеет танк, а другой противотанковое орудие. Понятно, что такие модели не могут определить во всей своей сложности реальные боевые действия, тем не менее построение и изучение их имеет смысл по крайней мере по двум мотивам: во-первых, позволяет отработать методологию математического моделирования и, во-вторых, какой бы

сложный бой мы ни рассматривали, все действия противоборствующих сторон можно разложить на отдельные элементы, из которых он складывается.

К числу таких элементов и относятся дуэльные столкновения. Проанализируем простейший случай, когда в дуэли сталкиваются две боевые единицы A и B . Вероятность поражения противника примем равной p для A и q для B . Противники поочередно стреляют друг по другу. С помощью методов теории вероятностей можно дать некоторые оценки ожидаемых результатов такой дуэли.

Оценим вероятность того, что A поразит B после k выстрелов при условии, что он начинает стрелять первым. Как уже говорилось, вероятность поражения противника соперником A при одном выстреле, например при первом, равна p . Вычислим вероятность поражения при втором выстреле. Рассматриваемое событие сложное и для его наступления необходимо, чтобы был выполнен ряд обстоятельств. Например, противник A при первом выстреле не поразил цель, противник B сделал ответный выстрел и также не поразил цель. Только после этого противнику A предоставляется право на второй выстрел.

Введем следующие условные обозначения:

A_1 — попадание A при первом выстреле;

\bar{A}_1 — непопадание A при первом выстреле;

B_1 — попадание B при первом выстреле;

\bar{B}_1 — непопадание B при первом выстреле;

A_2 — попадание A при втором выстреле и т. д.

Так как A может поразить цель при втором выстреле, если первые выстрелы обоих соперников не достигли цели, то $A_2 = \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot A_1$. Все три события в правой части равенства независимы, следовательно, можно применить теорему о вероятности произведения независимых событий:

$$P(A_2) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot A_1),$$

$$P(A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{B}_1) \cdot P(A_1).$$

Обозначим $P(A_1) = p$, $P(B_1) = q$,

тогда

$$P(\bar{A}_1) = 1 - p, \quad P(\bar{B}_1) = 1 - q.$$

Окончательно имеем

$$P(A_2) = (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot p.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что

$$P(A_3) = (1 - p)^2 \cdot (1 - q)^2 \cdot p.$$

Теперь можем определить, чему равна вероятность, что A поразит противника B после k выстрелов:

$$P(A_k) = p + (1 - p) \cdot (1 - q) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot (1 - q)^2 \times \\ \times p + \dots + (1 - p)^{k-1} \cdot (1 - q)^{k-1} \cdot p.$$

Полученный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $(1-p) \cdot (1-q)$ и начальным членом p . Вычислим сумму этого ряда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k) = \frac{p}{1 - (1 - p) \cdot (1 - q)}.$$

Аналогичным образом можно найти, чему равна вероятность, что противник B поразит цель A после k выстрелов:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k) = \frac{q(1-p)}{1 - (1 - p) \cdot (1 - q)}.$$

Приведенные рассуждения и выкладки весьма наглядно показывают принципы математического моделирования дуэльных ситуаций, однако нужно отдавать отчет в том, что рассмотренная модель весьма схематична. Она не отражает многих существенных сторон реального боя: определение времени выстрела, учет имеющихся боекомплектов, количество произведенных выстрелов и др. Указанные замечания легко можно устранить путем «усовершенствования» рассмотренной модели, в частности за счет введения элементов теории случайных функций. Такие модели успешно разрабатываются советскими математиками, однако здесь еще много нерешенных вопросов.

Дуэльные модели могут оказаться полезными при решении целого ряда вопросов, связанных с оценкой эффективности оружия и с анализом наиболее простых тактических приемов ведения боя.

Танк против танка. В качестве примера дуэльного боя рассмотрим бой танка против танка. Предположим, что танки оснащены огневыми средствами A и B , имеющими одинаковые скорострельности в течение всего боя. Вероятности поражения противника при одном выстреле p и q соответственно. Боекомплекты сторон неограниченны, т. е. дуэль между танками может продолжаться в принципе бесконечно долго.

Нас будут интересовать предельные значения вероятностей поражения противников.

$$P^*_A = \lim_{t \rightarrow \infty} P_A(t) \quad \text{и} \quad P^*_B = \lim_{t \rightarrow \infty} P_B(t).$$

Можно вычислить

$$P^*_A = \frac{q}{p+q} \quad \text{и} \quad P^*_B = \frac{p}{p+q}.$$

Нужно определить, какое количество выстрелов должны произвести противники для достижения победы с заданным уровнем вероятности. Обозначим искомые числа соответственно N_A и N_B . Выведем формулу для вычисления N_A . Вероятность того, что первый танк не поразит противника равна $(1-p)$. По формуле вычисления вероятности появления хотя бы одного события в серии повторных испытаний имеем

$$P^*_B = 1 - (1-p)^{N_A}.$$

Используя вышеприведенные формулы, находим

$$\frac{p}{p+q} = 1 - (1-p)^{N_A}.$$

Решая данное равенство относительно N_A , получим

$$N_A = \frac{\lg q - \lg(p+q)}{\lg(1-p)}.$$

Аналогичным образом

$$N_B = \frac{\lg p - \lg(p+q)}{\lg(1-q)}.$$

Пример. Рассмотрим дуэль между двумя танками, для которых вероятность поражения противника равна $p=0,6$ и $q=0,1$.

Необходимо вычислить среднее количество выстрелов, которое должен сделать каждый танк для достижения победы.

Подставляя данные в вышеприведенные формулы, находим соответственно N_A и N_B :

$$N_A = \frac{\lg 0,6 - \lg(0,6+0,1)}{\lg(1-0,6)} = 1,4607,$$

$$N_B = \frac{\lg 0,1 - \lg(0,6+0,1)}{\lg(1-0,6)} = 2,1223.$$

Эти результаты означают, что в среднем в течение дуэли сторона A должна сделать один выстрел, а сторона B — два выстрела.

Задача о разведчике. При знакомстве с понятием статистической теории информации Шеннона внимательный читатель мог сделать вывод о том, что эта теория несколько формалистична, слишком «тупа» по сравнению с невообразимой сложностью окружающего нас мира. Естественно, возникают вопросы: а много ли от нее проку, коль в ее основе столько условностей, и можно ли достаточно эффективно применять ее на практике? Жизнь убедительно доказывает, что можно и иногда в самых неожиданных областях.

И. Я. Динер приводит весьма любопытный пример. Назовем его «задача о разведчике». По цели может быть произведено n независимых выстрелов; вероятность поражения цели при каждом выстреле равна p . После k -го выстрела ($1 \leq k \leq n$) производится разведка, сообщающая, поражена или не поражена цель. Если она поражена, то стрельба по ней прекращается. Нужно определить, каким должно быть k , чтобы количество информации, доставляемое разведкой, было максимально.

Решим эту задачу. После k -го выстрела цель, по которой ведется стрельба, может находиться в двух состояниях: x_1 — цель поражена, x_2 — цель не поражена.

Вычислим вероятности этих состояний и построим закон распределения вероятностей для рассматриваемой системы. Вероятность поражения цели при одном выстреле по условию задачи равна p . Тогда вероятность непоражения цели при одном выстреле будет равна $1-p$. Вероятность непоражения цели при k выстрелах будет равна $(1-p)^k$. Вероятность поражения цели при k выстрелах будет равна $1-(1-p)^k$. Таким образом, закон распределения вероятностей можно представить в виде следующей таблицы:

Возможное состояние системы	x_1	x_1	x_2
Вероятности этих состояний	p_1	$1-(1-p)^k$	$(1-p)^k$

Информация о состоянии нашей системы будет мак-

симальна, когда оба состояния x_1 и x_2 равновероятны. Приравняем вероятности обоих состояний:

$$1 - (1 - p)^k = (1 - p)^k.$$

Решая это равенство относительно k , находим

$$k = \frac{-1}{\log_2(1 - p)}.$$

В реальных условиях разведки вероятности могут изменяться в зависимости от многих факторов. Задаваясь различными значениями вероятностей p , будем получать различные значения k . Например при $p=0,2$ имеем

$$k = \frac{1}{0,3219} \approx 3.$$

Это значит, что при $p=0,2$ разведчик, ведущий наблюдение, должен сообщать данные разведки через каждые три выстрела. Именно такой интервал между выстрелами будет обеспечивать максимальную информативность.

Методы морской тактики. Значительный интерес представляет использование вероятностных методов в морской тактике. В книге профессора военно-морской академии Л. Г. Гончарова «Начала теории вероятностей в приложении к вопросам морской тактики», вышедшей в Ленинграде в 1925 г., рассматриваются многочисленные примеры, иллюстрирующие богатейшие возможности применения вероятностно-статистических методов в морском деле. Если принять во внимание, что эти возможности неизмеримо возросли в наши дни благодаря тому, что на службе армии и флота находится современная вычислительная техника, то станет понятна роль теории вероятностей в вопросах морской теории и практики.

Рассмотрим такой пример. При стрельбе торпедами возможны отклонения двоякого рода: боковые и по дальности. Вероятность попадания в корабль при наличии лишь боковых отклонений при данных условиях стрельбы обычно составляет $p_1=0,4$, только при отклонениях по дальности $p_2=0,2$. Определить вероятность попадания торпеды в корабль при наличии обоих отклонений.

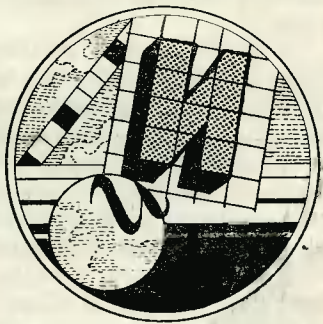
Задача решается просто на основе теоремы умножения вероятностей для независимых событий. Так как отклонения одного вида не зависят от отклонений другого вида, то искомая вероятность будет равна произведению этих вероятностей, т. е. $P = p_1 \cdot p_2 = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$.

Вероятностная модель наследственности. Пожалуй, нет такого уголка современного знания, куда бы ни проникла теория вероятностей и где бы ни были с пользой применены ее методы. Одной из удивительных загадок природы является проблема наследственности. Всего на Земле зарегистрировано около 2 млн. отдельных видов животных и растений. Все это огромное многообразие передает свои свойства «потомкам».

Каков механизм наследственности? Многие ученые занимались этой проблемой (выше упоминалось о работах Гальтона по теории наследственности). Широко известны (и поэтому мы их не рассматриваем) опыты Менделя по скрещиванию (гибридного) гороха и вычисление вероятностей появления тех или иных признаков. Самое удивительное то, что оказалось возможно с помощью вероятностных методов построить модель (правда, весьма приближенную) передачи наследственной информации у живых существ.

Важную роль в процессе передачи наследственности играют хромосомы, находящиеся в ядре клетки. Основной частью хромосом являются полимерные молекулы дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Молекулы ДНК представляют собой длинные цепи, составленные из чередующихся углеводных и фосфатных групп. При этом к каждому углеводу присоединено еще одно из четырех оснований, которые называются аденин, гуанин, цитозин и тимин. Если предположить, что в каждой молекуле ДНК записано некоторое сообщение, содержащее наследственную информацию, то вышеуказанные четыре основания играют роль элементарных сигналов в соответствующем четырехбуквенном коде (так же, как и азбука Морзе).

По данным ученых биохимиков, длина молекулы ДНК в хромосоме может достигать порядка нескольких тысяч



углеводных групп, а число отдельных хромосом в клетке может равняться нескольким десяткам. Если принять в среднем длину молекулы ДНК равной 1000 углеводных групп, а количество хромосом в ядре одной клетки равным 10, то тогда в одной клетке может быть «записано» в среднем 10 000 элементарных сигналов.

Если известно количество элементарных сигналов и число возможных состояний этих сигналов, то с помощью статистической теории информации можно определить, какое количество информации несут в себе эти сигналы.

Для этого используем формулу энтропии. Вычислим, какое количество информации может быть «записано» в одной клетке:

$$H(X) = \left(- \frac{1}{4^{10\,000}} \log_2 \frac{1}{4^{10\,000}} \right) \cdot 4^{10\,000} = 20\,000 \text{ бит.}$$

Вероятностная модель восприятия. Вероятно, многим из наших читателей памятна дискуссия между «лириками» и «физиками», начатая с легкой руки одного из известных советских кибернетиков И. Полетаева о том, какие способности человека можно будет передать вычислительным машинам.

Надо признать, что машины оказались весьма странными учениками: они с необычайной легкостью усваивают некоторые способности, которые не каждому человеку легко даются, например — решение всевозможных задач, умение играть в шахматы и даже... доказывать теоремы.

В то же время другие способности, не представляющие труда для любого человека, машинам передать не удастся. К числу таких способностей относится восприятие образов. Необходимость создания «читающих» автоматов выдвигает перед учеными настоятельную потребность использования количественных методов при изучении процесса восприятия. Оказалось, что и здесь нельзя обойтись без теории вероятностей.

Вероятностную модель восприятия разработал советский психолог Е. Н. Соколов. Его модель базируется на рефлекторной теории восприятия, которая была впервые выдвинута И. М. Сеченовым. Для того чтобы можно было провести количественный анализ процесса восприя-

тия, потребовалось осуществить некоторую схематизацию процесса изображения. Так, каждое плоское изображение предполагается расположенным на ограниченном участке поверхности, называемом кадром. Кадр разбит на элементы (квадратики) вертикальными и горизонтальными линиями, проходящими параллельно друг другу на одинаковом расстоянии. Таким образом, общее число элементов кадра будет равно произведению числа строк на число столбцов. При так называемом черно-белом изображении каждый элемент кадра может находиться лишь в двух состояниях: «занятом» (черном) или в «пустом» (белом).

Такое упрощение несколько утрировано, но оно вполне оправдано тем, что контур и силуэт играют ведущую роль в опознавании предметов. Так, например, контурный рисунок при всей своей схематичности дает достаточно представление об изображаемом предмете, на том же эффекте основан театр теней. Что же касается распознавания букв, то такое упрощение тем более справедливо. Вот, например, как схематически будет изображена на кадре буква «Н» (рис. 14).

Для удобства обозначения элементов кадра в данном случае использована нотация, подобная той, которая применяется для обозначения полей шахматной доски. Пользуясь принятой нотацией, можно сказать, например, что элемент d 2 является занятым, а элемент e 2 пустым.

Любопытно, что если принять определенный порядок считывания элементов, например по столбцам, то можно заменить плоское изображение линейным. Такая линейзация значительно облегчает практическую реализацию процесса восприятия. Поэлементное считывание изображений можно осуществить автоматическим устройством, например путем движения точечного фотоэлемента по столбцам кадра. Результаты считывания могут быть записаны в ячейках памяти электронно-вычислительной машины таким образом, что каждый разряд ячейки будет соответствовать одному элементу кадра; два различных состояния разряда

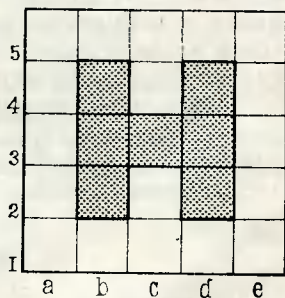


Рис. 14. Схематическое изображение буквы «н» на кадре

будут соответствовать двум различным состояниям элемента, например 0 — элемент пустой, 1 — элемент занятый. Линейное представление кадра называется *разверткой изображения*.

Итак, предположим, что в кадре имеется изображение какой-нибудь одной буквы. Как должна действовать ЭВМ для того, чтобы «прочитать» эту букву? Здесь возможны два подхода. Первый состоит в том, что в памяти ЭВМ имеются изображения всех букв алфавита. ЭВМ поэлементно считывает букву, изображенную в кадре, и вычисляет коэффициент корреляции между изображением в кадре и каждой буквой, содержащейся в памяти ЭВМ. Буква в кадре будет отождествлена с той буквой алфавита, для которой коэффициент корреляции окажется максимальным. При полном совпадении воспринимаемого изображения и буквы-эталона коэффициент корреляции равен единице. Однако в силу дефектов печати, загрязнения кадра или оптических искажений величина его может быть несколько меньше единицы.

Второй способ основан на использовании формул Бейеса, которые называются формулами переоценки вероятности гипотез. Этот способ является более экономичным, чем первый. Для того, чтобы «прочитать» букву этим способом, необязательно обследовать все элементы кадра, а достаточно проверить некоторую часть из них.

Перед исследованием первого элемента кадра имеется ряд предположений (гипотез) о том, какая буква изображена в кадре. Обозначим эти гипотезы A_1, A_2, \dots, A_n и будем предполагать известными вероятности этих первоначальных гипотез $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$. Очевидно, что с каждой из гипотез связано состояние первого элемента, т. е. будет он занятый или пустой. Для определенности рассматривают только один признак — элемент занятый. Обозначим его K_1 .

Теперь предположим, что произведено обследование первого элемента и он оказался занятым. Тогда переоценка вероятности первоначальных гипотез может быть произведена на основании формул Бейеса:

$$P_{K_1}(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(K_1)}{P(K_1)},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Затем приступаем к обследованию следующего элемента и снова делаем переоценку вероятности первоначальных

чальных гипотез. Для любого r -го элемента вышеприведенная формула будет иметь такой вид:

$$P_{K_r}(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(K_r)}{P(K_r)},$$

где $i=1, 2, \dots, n$; r — порядковый номер элемента. Буква, изображенная в кадре, окажется «прочитанной», как только вероятность гипотезы относительно этой буквы станет равной единице.

Рассмотренная нами модель восприятия ни в коей мере не претендует на окончательное решение сложной проблемы распознавания образов. Она представляет собой лишь первый шаг в решении проблемы.

Вероятностные автоматы. Понятие вероятностного автомата возникло как естественное обобщение понятия детерминированного автомата. Рассмотрим модель детерминированного автомата. Ее можно схематически представить в таком виде:

$$X \Rightarrow \boxed{Y} \Rightarrow Z$$

Здесь прямоугольником обозначено некоторое устройство (автоматический регулятор, преобразователь, устройство переработки информации и т. д.). Для простоты будем считать, что это устройство принимает конечное число возможных состояний $Y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Например, регулятор подачи газа может находиться в двух состояниях: y_1 — открыт или y_2 — закрыт и т. д. На вход этого устройства подаются входные воздействия — параметры (это могут быть какие-либо сигналы, показатели технологического режима или расхода каких-то материалов и т. д.).

Совокупность входных параметров будем рассматривать как вектор $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. После входного воздействия на выходе нашего устройства будут получены выходные параметры (это могут быть какие-либо звуковые или световые сигналы, показатели качества продукции или производительности труда, цифровые данные и т. д.).

Совокупность выходных параметров представим как вектор $Z=(z_1, z_2, \dots, z_k)$.

Рассмотрим все возможные пары (x_s, y_l) , где $s=1, 2, \dots, n$; $l=1, 2, \dots, m$.

Множество этих пар обозначим буквой G . Предположим, что существуют функции $Y=\varphi(G)$ и $Z=\psi(G)$.

После введения вспомогательных понятий можно дать точное определение детерминированного автомата. Система $\langle X, Y, Z, \varphi, \psi \rangle$ образует *конечный автомат детерминированного типа*.

Функционирование такого автомата полностью определяется заданием двух матриц. Одна матрица, называемая *матрицей переходов*, определяет взаимно-однозначное соответствие между элементами множества G и множеством возможных состояний системы Y . В соответствии с этим функция φ называется *функцией переходов*. Вторая матрица, называемая *матрицей выходов*, определяет взаимно-однозначное соответствие между элементами множества G и значениями выходных параметров. В соответствии с этим функция ψ называется *функцией выходов*.

В качестве примера детерминированного автомата можно рассмотреть контролирующее обучающее устройство, работающее по принципу выборочного ответа. Здесь входными сигналами являются ответы, которые учащиеся вводят, нажимая соответствующие кнопки. Устройство перерабатывает вводимую в него информацию и в качестве выходных сигналов выдает оценки знаний.

Введем в рассмотрение множество всевозможных пар вида (z_r, y_l) , где $r=1, 2, \dots, k, l=1, 2, \dots, m$.

Обозначим это множество буквой F . Пусть каждому элементу множества G соответствует распределение вероятностей, определенное на множестве F . Когда множество F является конечным, закон распределения вероятностей может быть задан в виде некоторой таблицы. Количество таблиц будет равно числу элементов множества G . Совокупность всех этих таблиц принято обозначать буквой T .

Детерминированные автоматы и вероятностные автоматы по своему техническому назначению выполняют одну и ту же задачу — осуществляют переход от элементов множества G к элементам множества F . Если, например, рассматривать автомат в данный момент при некотором элементе g_{ql} множества G (иными словами, устройство находится в состоянии y_q и на вход в этот момент поступил сигнал x_l), то после одного такта работы автомат перейдет в состояние, соответствующее одному из элементов f_{lj} множества F (т. е. устройство перейдет в состояние y_j , а на выходе появится сигнал z_j).

Разница состоит в том, что если в детерминированном автомате после одного такта работы переход будет осуществлен к вполне определенному элементу множества F , то в случае вероятностного автомата переход может произойти к любому элементу множества F с некоторой

вероятностью p_{ij} , причем $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

Теперь представляется возможным дать вполне строгое определение вероятностного автомата. Система $\langle X, Y, Z, T \rangle$ называется *вероятностным автоматом с постоянной структурой*.

Это определение вероятностного автомата является довольно общим. Ознакомимся с вероятностными автоматами частного вида. Аналогично тому, как таблицы T определяют вероятность перехода от фиксированного элемента g_{qi} множества G к элементу f_{ij} множества F , можно ввести в рассмотрение таблицы вероятностей, определяющие вероятность p_i перехода в состояние y_i и вероятность p_j появления выхода z_i при условии, что устройство находилось в состоянии y_q и на его вход поступил сигнал x_r . Если $p_i \cdot p_j = p_{ij}$ при любых i и j , то вероятностный автомат называется *вероятностным автоматом Мили*.

На практике часто встречается такой случай, когда на входе может быть только один сигнал или вообще отсутствуют какие-либо сигналы. Иными словами, это отвечает тому случаю, когда множество X содержит только один элемент. Вероятностный автомат, у которого множество X является одноэлементным, называется *автономным вероятностным автоматом*.

Для рассмотренных выше вероятностных автоматов предполагается, что матрицы переходных вероятностей или таблицы выходов являются неизменными в течение всего периода работы автомата. Такие вероятностные автоматы, как уже отмечалось выше, называются *вероятностными автоматами с постоянной структурой*. Эти автоматы широко применяются на практике.

Однако не меньший интерес для практических приложений представляют такие вероятностные автоматы, у которых при переходе от одного такта работы к другому происходит изменение матрицы переходных вероятно-

стей, или таблицы выходов. Эти автоматы называются *вероятностными автоматами с переменной структурой*.

Вероятностные автоматы нашли широкое применение во многих областях практики: при разработке различных систем управления, при регулировке движения через перекресток, при создании самообучающихся автоматов и т. д.

Объем книги не позволяет подробнее остановиться на рассмотрении этих задач, а тем, кто желает основательно познакомиться с теорией и практикой использования вероятностных автоматов, рекомендуем прочитать интересную книгу Д. А. Поспелова «Вероятностные автоматы» (М., «Энергия», 1970).

* * *

В этой главе были рассмотрены основные методы теории вероятностей и наиболее интересные ее приложения. Как видите, круг практических проблем, решаемых теорией вероятностей, довольно широк. Поэтому охватить все вопросы не представляется возможным.

Жизнь предъявляет новые требования к теории вероятностей, буквально на наших глазах появляются новые методы и направления этой науки.

Так, бурное проникновение теоретико-вероятностных и статистических методов во все области знания заставляет говорить о специфике прикладной математики. Образно говоря, теория вероятностей и математическая статистика являются двумя сторонами одной медали. Если теория вероятностей открывает объективные закономерности массовых случайных явлений, то математическая статистика помогает использовать эти закономерности на практике. Она выводит правила, согласно которым можно по результатам наблюдений производить некоторые выводы, характеризующие вероятность события.

Сейчас трудно даже перечислить все области, в которых теоретико-вероятностные и статистические представления играют важную роль, так как число людей, являющихся «потребителями» вероятностно-статистической науки, в последние десятилетия значительно возросло. Как отмечает академик АН УССР Б. В. Гнеденко, статистические концепции и закономерности «необходимы в наши дни не каким-то исключительным специалистам, а

буквально всем—рабочему и врачу, инженеру и учителю, экономисту и военному, биологу и агроному, строителю и организатору производства».

Например, в медицине и медицинской диагностике теоретико-вероятностный стиль мышления начинает играть такую же важную роль, как в технике и экономике. В сущности, каждый врач при постановке диагноза пользуется вероятностным подходом. Но, к сожалению, пока он лишен возможности выносить точные количественные оценки для вероятности каждого из заболеваний.

Несомненно, что для точных заключений в медицине требуются и точные количественные оценки, например, следующего типа: «При наличии данного симптомокомплекса вероятность заболевания $A_1=0,9$, а заболевания $A_2=0,7$, а для заболевания A_3 вероятность всего лишь $0,2$ ». Такие данные можно получить путем обработки только большого количества историй болезни. Эта работа ведется во многих научных коллективах: в отделении медицинской кибернетики института кибернетики АН УССР, в институте грудной хирургии имени академика Вишневого и многих других. Современный врач должен уметь пользоваться статистическими методами не хуже, чем стетоскопом.

В правоведении и юридической практике использование судебной статистики уже давно стало традиционным. Здесь статистические методы позволяют следить за динамикой правонарушений, оценивать с помощью различных показателей эффективность гражданского и уголовного судопроизводства, изучать причины преступности. В последнее время статистические методы используются также в криминалистике для оценки надежности тех или иных выводов в условиях неопределенности.

Но, пожалуй, наиболее интересными и многообещающими являются исследования, связанные с применением вероятностно-статистических методов к изучению причинности. В юридической литературе это научное направление известно под названием «вероятностной теории причинности». Она позволяет глубже проникать в смысл важнейших понятий юридической науки и практики.

В психолого-педагогических исследованиях попытки широкого использования вероятностно-статистических методов вызывают некоторые трудности. Основные из них состоят в отсутствии адекватных измерителей психо-

лого-педагогических явлений. Например, возникают такие вопросы.

Можно ли считать, что обычная школьная отметка (например, в пятибалльной системе) является достаточно надежным измерителем знаний учащихся? Можно ли утверждать, что ученик, получивший оценку «четыре» по некоторому предмету, приобрел количество знаний ровно в два раза большее, чем тот, кто получил по этому же предмету оценку «два»? Очевидно, нет. В таком случае возможна ли обработка этих данных методами математической статистики? Какую реальную интерпретацию можно дать средней отметке по предмету в одном классе?

Повышенный интерес к получению надежных исходных количественных данных и попытки преодолеть отмеченные трудности привели к разработке теории измерений. Особенно большой вклад в эту теорию внес выдающийся американский математик А. Тарский. В нашей стране многочисленные исследования, связанные с применением количественных методов в психолого-педагогических исследованиях, проводят научные коллективы, которые возглавляют Г. В. Воробьев, В. П. Битинас, В. И. Огорелков и другие.

В материаловедении и контроле качества вероятностно-статистические методы нашли широкое применение в связи с развитием предприятий, производящих массовую продукцию. Здесь важно то, что методы теории вероятностей используются не только для браковки готовой продукции, но, что особенно важно, для наилучшей организации производства высококачественной продукции.

В годы Великой Отечественной войны академик Н. Н. Давиденков применял математическую статистику для оптимизации механических свойств броневой стали. В послевоенные годы особую актуальность приобрели вопросы, связанные с контролем качества промышленной продукции. Научные методы такого контроля успешно разработали академик А. Н. Колмогоров и профессор А. М. Длин. В настоящее время статистические методы контроля качества продолжают совершенствоваться.

В практике лабораторной и научно-исследовательской работы весьма эффективным оказалось использование круга новых вероятностно-статистических идей, которые образовали теорию планирования эксперимента.

В нашей стране работу в этом направлении возглавляют В. В. Налимов, Е. В. Маркова, Ю. П. Адлер и другие. Планирование эксперимента в производственных условиях позволяет наилучшим образом построить эксперимент, уменьшить число необходимых опытов, снизить затраты на проведение исследовательских работ и в то же время получать более достоверные данные.

Теория планирования эксперимента, с одной стороны, дает рекомендации по обработке данных, полученных в процессе повседневной работы предприятий без вмешательства исследователя — так называемый пассивный эксперимент. А с другой стороны, она разрабатывает (и в этом ее главная задача) планы так называемого активного эксперимента, т. е. такого, когда исследователь нужным образом организует его, чтобы получить данные об изучаемом процессе или явлении. Теория планирования эксперимента в настоящее время завоевала признание не только у «чистых» математиков, но и у «прикладников», использующих методы этой науки.

В заключение хочется еще раз подчеркнуть, что теория вероятностей, подобно другим разделам математики, развилась из практики и именно практические потребности постоянно стимулируют ее развитие. В книге на многочисленных примерах было показано, как многие разделы теории вероятностей получили развитие в связи с необходимостью дать ответ на вопросы практиков.

За последнее время теория вероятностей превратилась в стройную математическую дисциплину. Ее методы все шире используются для решения различных практических задач.



Заключение

Наш рассказ о всевозможных применениях теории вероятностей подошел к концу. Любимый афоризм Козьмы Пруtkова «Никто не обнимет необъятного!» — приходится признать справедливым. Это аксиома. Рассказать о всех областях применения теории вероятностей в науке и технике, в повседневной жизни означало бы объять необъятное, хотя мы в силу человеческих слабостей тоже стремились к этому и старались, чтобы читатель получил как можно больше информации из нашей книги.

Но увы... В конце концов мы вынуждены были ограничиться рассказом о наиболее интересных, на наш взгляд, аспектах теории вероятностей, рассмотрели те ее методы, которые имеют наибольшее значение для практики. Бесспорно, что при отборе материала и практических примеров сказались и личные интересы авторов, так как большинство приведенных примеров взяты из опыта нашей практической деятельности.

В последние годы вышло много книг, посвященных теории вероятностей. Среди этих книг есть и фундаментальные теоретические исследования, и научно-популярные, и прикладные работы. Естественно возникает вопрос: что может добавить к этим n книгам еще одна $n+1$ книга? Думается, что в существующей литературе по теории вероятностей, рассчитанной на широкого читателя, имеется один существенный пробел: уделяя большое внимание обсуждению математических тонкостей, авторы, как правило, оставляют в тени вопросы конкретного практического применения, так сказать, вопросы эффективности теории вероятностей. Хотелось бы надеяться, что прочитанная книга будет не только способствовать углублению вероятностного мировоззрения читателя, но и научит его основам вероятностно-статистического «ремесла».

ЛИТЕРАТУРА

- ✓ Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
- ✓ Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1969.
- ✓ Длин А. М. Математическая статистика в технике. М., «Сов. наука», 1958.
- ✓ Китайгородский А. И. Невероятно не факт. М., «Молодая гвардия», 1972.
- ✓ Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1974.
- ✓ Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Ист. очерк. М., «Наука», 1967.
- ✓ Растринин Л. А. Этот случайный, случайный, случайный мир. М., «Молодая гвардия», 1974.
- ✓ Реньи А. А. Письма о вероятности. М., «Мир», 1970.
- ✓ Розанов Ю. А. Лекции по теории вероятностей. М., «Наука», 1968.
- ✓ Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., 1968.
- ✓ Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., «Наука», 1969.
- ✓ Тутубалин В. Н. Теория вероятностей. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
- ✓ Яглом А. М. и Яглом И. М. Вероятность и информация. М., «Наука», 1973.

258

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
I. Что такое вероятность?	7
Ошибка Д'Аламбера	7
Проигранное пари	29
Бит или не бит?	48
Новая ветвь	53
II. Теория вероятностей и практика	64
Рецепты качества	64
«Русалка» и инженеры	83
Кто сказал «А»?	100
Числа выигрывают бой	108
Рождение модели	115
Заключение	126
Литература	127

Аркадий Моисеевич Чубарев
Владимир Сергеевич Холодный

НЕВЕРОЯТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

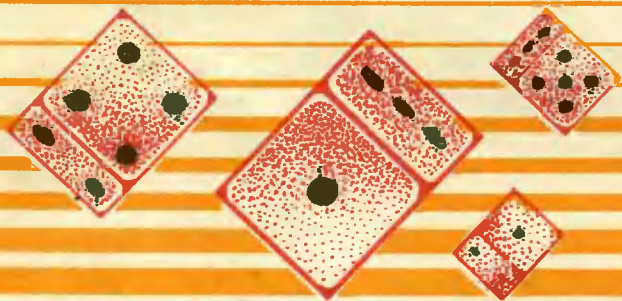
(О прикладном значении теории вероятностей)

Редактор Н. Феоктистова
Художник С. Рокамболь
Худож. редактор Т. Добровольнова
Техн. редактор Т. Айдарханова
Корректор В. Каночкина

А09125. Индекс заказа 56729. Сдано в набор 10/XII-75 г.
Подписано к печати 14/IV-76 г. Формат бумаги $84 \times 108^{1/32}$.
Бумага типографская № 1. Бум. л. 2,0. Печ. л. 4,0.
Усл. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,67. Тираж 100 000 экз.
Издательство «Знание». 101835. Москва, Центр, проезд
Серова, д. 4. Заказ 11405. Саратов. Типография изда-
тельства «Коммунист», Волжская, 28. Ц. ~~100000~~ л.

52PH

~~52PH~~



А. М. ЧУБАРЕВ, В. С. ХОЛОДНЫЙ
**НЕВЕРОЯТНАЯ
ВЕРОЯТНОСТЬ**

